ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

Алгебра жана геометрия кафедрасы

Курбанбаева Н.Н.

МАТЕМАТИКА ДИСЦИПЛИНАСЫ БОЮНЧА ӨЗ АЛДЫНЧА ТАПШЫРМАЛАРДЫН ТОПТОМУ

(1-бөлүк)

Окуу-усулдук колдонмо

Ош-2022

УДК 51
ББК 22.1
К 93

Окуу колдонмо Ош мамлекеттик университетинин Окумуштуулар кеңешинин 2022-жылдын 6-октябрында болуп өткөн №2 жыйынынын чечими боюнча басмага сунушталган.

Резензенттер:

- физ.-мат.илим.докт., профессор, КР УИАнын мүчө-корреспонденти Матиева Г.
- физ.-мат. илим.канд., доцент, КӨЭАУнун доценти Абдуллаева Ч.Х.

К 93 **Курбанбаева Н.Н.**
Математика дисциплинасы боюнча өз алдынча тапшырмалардын топтому. Окуу-усулдук колдонмо / Ош мамлекеттик университети: – Ош, 2022. – 103 б.

ISBN 978-9967-18-850-1

Кыскача сызыктуу алгебранын негизги түшүнүктөрү боюнча өз алдынча тапшырмалардын топтому берилген. Ар бир параграфтын теориялык материалдарын бекемдөө үчүн тиешелүү мисалдар тандалган. Ал эми окуу-усулдук колдонмонун акырында ар бир бөлүм боюнча студенттердин билимин текшерүү үчүн машыктыруучу тесттердин топтому киргизилген.

Бул окуу-усулдук колдонмону пайдаланууда студенттерге окутуунун кредиттик системасында маалыматтарды кабыл алууну, сактоону кайрадан иштеп чыгууну, таркатууну мамлекеттик жана официалдуу тилдерде заманбап информациялык-коммуникациялык технологияны (ИКТ) пайдалануу менен ишке ашыруу жөндөмдүүлүкторун ашырууга өбөлгө түзүлөт.

Окуу-усулдук колдонмо жогорку окуу жайларынын бакалавриат жана дистанттык бөлүмдөрүндө билим алып жаткан 1-курсунун студенттерине арналган.

УДК 51
ББК 22.1
ISBN 978-9967-18-850-1

Мазмуну

Киришүү 4

МАТРИЦАЛАР. МАТРИЦАЛАР МЕНЕН АМАЛДАР

1.1. Матрица түшүнүгү боюнча негизги маалымат 5

1.2. Матрицалардын үстүнөн амалдар 7

Мисалдар чыгарылыштары менен 9

Өз алдынча чыгаруу үчүн тапшырмалар (А группасы) 15

Өз алдынча чыгаруу үчүн тапшырмалар (В группасы 18

АНЫКТАГЫЧТАР. СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН КРАМЕРДИН МЕТОДУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

2.1. Аныктагычтар. Аныктагычтарды эсептөө ыкмалары 21

2.2.Крамер методу менен СТСны чыгаруу 29

Мисалдар чыгарылыштары менен 32

Өз алдынча чыгаруу үчүн тапшырмалар (А группасы) 42

Өз алдынча чыгаруу үчүн тапшырмалар (В группасы) 45

ТЕСКЕРИ МАТРИЦА. ТЕСКЕРИ МАТРИЦАНЫ КОЛДОНУУ МЕНЕН СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН ЧЫГАРУУ

3.1. Тескери матрица 48

3.2. Матрицалык ыкма 50

Мисалдар чыгарылыштары менен 51

Өз алдынча чыгаруу үчүн тапшырмалар (А группасы) 58

Өз алдынча чыгаруу үчүн тапшырмалар (В группасы) 60

СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН ГАУССТУН МЕТОДУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

4.1. Матрицанын рангы жана аны эсептөө 63

4.2. Кронекер-Капеллинин теоремасы 66

4.3. Гаусстун ыкмасы 69

Мисалдар чыгарылыштары менен 70

Өз алдынча чыгаруу үчүн тапшырмалар (А группасы) 81

Өз алдынча чыгаруу үчүн тапшырмалар (В группасы) 85

Машыктыруучу тесттер 88

Колдонулган адабияттар 103

Киришүү

Билимдин жана техниканын түрдүү тармагында инженердик багытында даярдалып жаткан студенттердин билиминин фундаменти математика болуп эсептелет. Бул багыттарды даярдоодо сызыктуу алгебра математиканын негизги бөлүгү болуп эсептелет.

Сызыктуу алгебранын материалдары боюнча орус тилинде жазылган окуу куралдары бир топ, бирок кыргыз тилинде жазылган окуу куралдары аз санда.

Бул окуу-усулдук колдонмонун негизги максаты сызыктуу алгебранын бөлүмдөрү боюнча студенттерге теориялык билимдерин практикалык маселелерди жана өз алдынча тапшырмаларды аткарууда колдонуусуна өбөлгө түзүү болуп эсептелет.

Окуу-усулдук колдонмодо ар бир параграфта негизги теориялык кыскача маалыматтар, керектүү формулалар келтирилген жана кененирээк чечилген мисалдарга өзгөчө көңүл бөлүнгөн. Андан сырткары, практикалык тапшырмалар берилип, студенттердин теориялык билимдерин бекемдөө үчүн тиешелүү мисалдар камтылган. Мында негизи өз алдынча тапшырмалар менен иштөөнүн ыкмаларына көңүл бурулган. Ал мисалдар студенттердин жалпы теориялык билимдерин бекемдөөгө, математикалык маданиятын өстүрүүгө жана ар кандай маселени чыгарууда пайдалана алуу билгичтиктерин өнүктүрүүгө көмөк берет.

Ар бир параграфтын теориялык материалдарын бекемдөө үчүн тиешелүү мисалдар тандалган жана ар бир тема боюнча аудиторияда чыгарууга жана талдоого (А бөлүктө), ошондой эле өз алдынча тапшырмаларды аткаруу үчүн (В бөлүктө) мисалдар сунушталган. Берилген мисалдар жооптору менен келтирилген. Ал эми колдонмодогу берилген материалдарды бышыктоо үчүн окуу колдонмонун акырында ар бир бөлүм боюнча студенттердин билимин текшерүү үчүн машыктыруучу тесттер киргизилген.

Окуу-усулдук колдонмо жогорку жайларынын бакалавриат жана дистанттык бөлүмдөрүндө билим алып жаткан студенттердин өз алдынча иштөөсү үчүн сунушталат.

МАТРИЦАЛАР. МАТРИЦАЛАР МЕНЕН АМАЛДАР

1.1. Матрица түшүнүгү боюнча негизги маалымат

$m \times n$ өлчөмдүү сандарды камтыган матрица деп m жолчодон n мамычадан турган төмөндөгүдөй көрүнүштөгү таблицаны айтабыз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Мында $a_{ij} \in R \ (i = 1, 2, \dots, m; \ j = 1, 2, \dots, n)$. $a_{ij} \in R$

a_{ij} саны – *матрицанын элементтери* деп аталат.

Индекс i–жолчолордун номери (ал дайыма биринчи орунда турат), j– мамычалардын номери.

Матрицаларды латын альфавитинин баш тамгалары менен кыскача бул көрүнүштө жазабыз:

$$A = (a_{ij}); \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Мисалы: $$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Эгерде матрица бир гана жолчодон турса, анда $1 \times n$ өлчөмүндөгү ***жолчолуу матрица*** деп аталат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Эгерде матрица бир гана мамычадан турса, анда $m \times 1$ өлчөмүндөгү ***мамычалуу матрица*** деп аталат:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \dots \\ b_{1n} \end{pmatrix}$$

(1) - көрүнүшүндөгү матрица $n=m$ болгон учурда n –тартиптеги ***квадраттык матрица*** деп аталат.

Мисалы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ үчүнчү тартиптеги квадраттык матрица.

Матрицанын a_{ij} элементтеринин жолчосунун номери менен мамычасынын номери барабар $(i = j)$ болгон элементтери *башкы диоганалын* түзүшөт жана ***диагоналдык матрица*** деп каралат.

Эгерде квадраттык матрицанын диагоналдык эмес бардык элементтери нөлгө барабар болсо, анда мындай матрица ***диагоналдык матрица*** деп аталат.

Эгерде n-тартиптеги диагоналдык матрицанын бардык элементтери бирге барабар болсо, анда мындай матрица n-тартиптеги ***бирдик матрица*** деп аталат жана E менен белгиленет.

Мисалы: $n = 2,$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Каалагандай өлчөмдөгү матрица *нөлдүк* же ***нөл матрица*** деп аталат, эгерде анын баардык элементтери нөлгө барабар болсо:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Матрицалардын үстүнөн амалдар

Сандар үстүнөн амалдарды жүргүзгөн сыяктуу матрицалардын үстүнөн дагы амалдарды жүргүзүүгө болот.

1. ***Матрицаны санга көбөйтүү***. A матрицасын $\lambda(\lambda \in R)$ санына көбөйтүү деп $i=1,2,...,m;$ $j=1,2,...,n$ *үчүн* элементтери $b_i=\lambda\cdot a_{ij}$ болгон $B=\lambda\cdot A$ матрицасын айтабыз (A *жана* B матрицаларынын өлчөмдөрү бирдей болот).

Натыйжа. Матрицанын баардык элементтеринин жалпы көбөйтүүчүсүн матрица белгисинин алдына чыгарууга мүмкүн.

$(-1)\cdot A$ *матрицасы* A *матрицасына карама-каршы матрица деп аталат жана* $-A$ деп белгиленет.

2. ***Матрицаларды кошуу***. Эки $A=(a_{ij})$ жана $B=(b_{ij})$бирдей $m\times n$ өлчөмдөгү матрицаларды кошуу деп $m\times n$ өлчөмдөгү элементтери $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ баардык индекстеринин маанилери i жана j болгон $C=A+B$ матрицасын айтабыз (о.э. эки матрица элементтери боюнча кошулат). Айрым учурда $A+O=A$, мында O – нөлдүк матрица.

3. ***Матрицаларды кемитүү***. Эки $A=(a_{ij})$ жана $B=(b_{ij})$бирдей $m\times n$ өлчөмдөгү матрицаларды кемитүү деп баардык индекстеринин маанилери i жана j барабар элементтери $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ болгон $C=A+(-1)B$ матрицасын айтабыз (о.э. эки матрица элементтери боюнча кемитилет).

4. ***Матрицаларды көбөйтүү***. $m\times k$ ченемдүү $A=(a_{ij})$ жана $k\times n$ өлчөмдүү $B=(b_{ij})$ матрицаларынын көбөйтүндүсү деп, элементтери

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}\cdot b_{sj}$$

суммасы менен аныкталган $C=(c_{ij})$матрицасын айтабыз. Мында, $i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n.$

5. ***Транспонирленген матрица***. A^T матрицасы A матрицасынын транспонирленген матрицасы деп аталат, эгерде жолчолорунун орду мамычаларынын орду менен алмаштырылса.

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underset{n\times m}{A^T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

МИСАЛДАР ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ МЕНЕН

Мисал 1.1. Матрицалардын суммасын тапкыла, эгерде

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 0 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ жана } B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{болсо.}$$

Чыгаруу.

$$A+B=\begin{pmatrix} 4+3 & 3+2 & 7+4 \\ 5+1 & -2+5 & 0+(-3) \\ 7+(-1) & 2+0 & 3+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 11 \\ 6 & 3 & -3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Жообу: $A+B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 11 \\ 6 & 3 & -3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Мисал 1.2. $4\cdot A-5\cdot B-3\cdot E$ матрицаны тапкыла,

эгерде $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ болсо.

Чыгаруу. $4A=\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 28 & 32 \end{pmatrix}$, $5B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 15 & -10 \end{pmatrix}$, $3E=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Анда табабыз, $4A-5B=\begin{pmatrix} 8-5 & 16-0 \\ 28-15 & 32-(-10) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 13 & 42 \end{pmatrix}$

$$4\cdot A-5\cdot B-3\cdot E=\begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 13 & 42 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 13 & 39 \end{pmatrix}$$

Жообу: $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 13 & 39 \end{pmatrix}$

Мисал 1.3. $B\cdot A$ матрицаларынын көбөйтүндүсүн тапкыла, эгерде

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ болсо.}$$

Чыгаруу. $B\cdot A$ матрицаларынын көбөйтүндүсүн табуу мүмкүн, анткени B матрицасында бир жолчо, ал эми A матрицасынын үч мамычасы бар.
$C=B\cdot A$ матрицаларынын көбөйтүндүсү 1×3 өлчөмүндө. Анда

$$C=B\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=(3\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+2\cdot(-1) \quad 3\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 2 \quad 3\cdot 1+$$

$$+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 1)=(-5 \quad 9 \quad 6)$$

Жообу: $B\cdot A=\begin{pmatrix}-5 & 9 & 6\end{pmatrix}$

Мисал 1.4. $\left(\left(A-B\right)\cdot C\right)^T$ тапкыла, эгерде $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ болсо.

Чыгаруу: $A-B$ айырмасын табабыз:

$$A-B=\begin{pmatrix}2-4 & -3-1\\ 4-(-2) & 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 6 & 1\end{pmatrix}$$

Көбөйтүндүсү төмөндөгүгө барабар болот:

$$\left(A-B\right)\cdot C=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-2)\cdot 3+(-4)\cdot 1 & (-2\cdot 2+(-4)\cdot(-1))\\ 6\cdot 3+1\cdot 1 & 6\cdot 2+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 0\\ 19 & 11\end{pmatrix}$$

$$\left(A-B\right)\cdot C=\begin{pmatrix}-10 & 0\\ 19 & 11\end{pmatrix}$$

Акыркы матрицаны транспонирлейбиз:

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 19 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -10 & 19 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Жообу: $\left((A-B)\cdot C\right)^T = \begin{pmatrix} -10 & 19 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

Мисал 1.5. Эгерде $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ болсо, анда $D = B \cdot A$ матрицасынын биринчи мамычасындагы элементтеринин көбөйтүндүсүн тапкыла:

Чыгаруу: D матрицасынын элементтерин табабыз:

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+(-2)\cdot3 & 1\cdot2+(-2)\cdot(-1) & 1\cdot3+(-2)\cdot2 \\ 0\cdot1+3\cdot3 & 0\cdot2+3\cdot(-1) & 0\cdot3+3\cdot2 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ D матрицасынын биринчи мамычасындагы элементтеринин көбөйтүндүсү төмөндөгүгө барабар:

$$-5 \cdot 9 = -45$$

Жообу: D матрицасынын биринчи мамычасындагы элементтеринин көбөйтүндүсү -45ке барабар.

Мисал 1.6. Эгерде $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ болсо, анда C матрицасынын биринчи жолчосундагы элементтеринин суммасын тапкыла:

Чыгаруу: Изделүүчү матрицасынын баардык элементтерин табабыз:

$$C=\begin{pmatrix} -3\cdot 2+4\cdot 1 & -3\cdot 3+4\cdot(-2) \\ 5\cdot 2+2\cdot 1 & 5\cdot 3+2\cdot(-2) \\ 0\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot 3+1\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -17 \\ 12 & 11 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Биринчи жолчосундагы элементтеринин суммасы төмөндөгүгө барабар:

$$2+(-17)=-19$$

Жообу: Биринчи жолчосундагы элементтеринин суммасы -19га барабар.

Мисал 1.7. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ болсо, анда $A^T\cdot B$ матрицасынын биринчи мамычасындагы элементтеринин суммасын тапкыла.

Чыгаруу: $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$A^T\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot(-3)+1\cdot 1+(-2)\cdot(-2) \\ 0\cdot(-3)+(-2)\cdot 1+1\cdot(-2) \\ 2\cdot(-3)+1\cdot 1+1\cdot(-2) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$2-4-7=-9$$

Жообу: Биринчи мамычасындагы элементтеринин суммасы -9 га барабар.

Мисал 1.8. Эгерде $A=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ болсо $C=-2\cdot A\cdot B$ матрицасынын диоганалдык элементтеринин көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу:

$$C=-2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix} -1\cdot 3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2\cdot(-1) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 4 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -4 \end{pmatrix}$$

$$6\cdot 4\cdot(-4)=-96$$

*Жообу***:** диоганалдык элементтеринин көбөйтүндүсү -96 га барабар.

“Матрицалар. Матрицалар үстүнөн жүргүзүлгөн амалдар” темасы боюнча өз алдынча чыгаруу үчүн тапшырмалар

Группа А

1.А. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ берилген болсо, $3\cdot A+4\cdot B-5\cdot E$ матрицасын тапкыла. E – бирдик матрица.

Жообу: $\begin{pmatrix} -3 & 17 \\ 24 & -10 \end{pmatrix}$

2.А. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 3 & 27 \\ -9 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$ берилген болсо, $\frac{1}{3}\cdot A-2\cdot B^T\cdot C$ матрицасын тапкыла.

Жообу: $\begin{pmatrix} -11 & 13 \\ 3 & -2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

3.А. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ берилген болсо, $D=\left(A\cdot B\right)^T-C^2$ матрицасын эсептегиле.

Жообу: $D=\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}$

4.А. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ берилген болсо, $A\cdot B\cdot C$ жана $C\cdot A\cdot B^T$ матрицаларынын көбөйтүндүсүн тапкыла.

Жообу: $A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -15 & 14 \end{pmatrix}$; $C\cdot A\cdot B^T=\begin{pmatrix} 10 & 75 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

5А. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ берилген болсо, $D=A\cdot B\cdot C-3\cdot E$ матрицасын эсептегиле. E - бирдик матрица.

Жообу: $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \\ 34 & 0 & 82 \end{pmatrix}$

6.А. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ болсо, A^2 жана $\left(A-A^T\right)^2$ эсептегиле.

Жообу: $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; $\left(A - A^T\right)^2 = \begin{pmatrix} -13 & 9 & -6 \\ 9 & -13 & -6 \\ -6 & -6 & -18 \end{pmatrix}$

Көрсөтмө: A матрицасынын квадраты аныктоо боюнча

$$A^2 = A \cdot A,\ \ A^3 = A \cdot A \cdot A, \cdots,\ A^n = A^{n-1} \cdot A.$$

7.А. Эгерде $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, болсо, $A \cdot B$, $B \cdot A$ жана $\left(A + B^T\right) \cdot B$ матрицаларынын көбөйтүндүсүн тапкыла.

Жообу: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\left(A + B^T\right) \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 5 & 52 \end{pmatrix}$$

8.А. *A жана B* матрицалары берилген. $A \cdot B$ ны тапкыла.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Жообу: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}$

“Матрицалар. Матрицалар үстүнөн жүргүзүлгөн амалдар” темасы боюнча өз алдынча чыгаруу үчүн тапшырмалар

Группа В

1.В. Эгерде $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ берилген болсо, $B\cdot A$ жана $A\cdot B^T$ матрицаларын эсептегиле.

Жообу: $B\cdot A=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $A\cdot B^T=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 16 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

2.В. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ болсо, $A\cdot B$, $B\cdot A$ матрицаларынын көбөйтүндүсүн жана $3\cdot A^T+2\cdot B$ суммасын тапкыла.

Жообу: $A\cdot B=\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}$;

$3\cdot A^T+2\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 19 \\ 18 & 28 \end{pmatrix}$

3.В. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ болсо, A^3 жана $2\cdot A^2-3\cdot A$ эсептегиле.

Жообу: $A^3 = \begin{pmatrix} 37 & -54 \\ -81 & 118 \end{pmatrix}$; $2 \cdot A^2 - 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & -14 \\ -21 & 32 \end{pmatrix}$

4.В. Эгерде $A^T \cdot C$ тапкыла, эгерде $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ болсо.

Жообу: $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 1 & -2 \\ 5 & -12 & 2 & -1 \\ 6 & -15 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

5.В. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ болсо, A жана B матрицаларынын көбөйтүндүсүнүн үчүнчү мамычасынын элементтеринин суммасын тапкыла, алардын көбөйтүлгөнүн мурда билип алгыла.

Жообу: A жана B матрицаларынын көбөйтүндүсүнүн үчүнчү мамычасынын элементтеринин суммасы 2ге барабар.

6.В. Эгерде $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ болсо, $A^T \cdot B$; $B^T \cdot A$ матрицаларынын көбөйтүндүсүн тапкыла.

Жообу: $A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -9 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; $B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -9 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

7.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ болсо,

$A \cdot B$; $B \cdot A^T$ матрицаларынын көбөйтүндүсүн тапкыла.

Жообу: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$**;** $B \cdot A^T = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -34 & 5 \\ -25 & 7 \end{pmatrix}$**.**

8.B. Эгерде $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасы берилген жана E – үчүнчү тартиптеги бирдик матрица болсо, анда $2A^2 + 3A - 5E$ матрицалык көп мүчөнүн маанисин тапкыла.

Жообу: $2A^2 + 3A - 5E = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 11 \\ 19 & 28 & 13 \\ 30 & 27 & 10 \end{pmatrix}$.

АНЫКТАГЫЧТАР.
СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН КРАМЕРДИН МЕТОДУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

2.1. Аныктагычтар. Аныктагычтарды эсептөө ыкмалары

A матрицаны мүнөздөөчү санды б.а. аныктагычты киргизүү зарылдыгы сызыктуу теңдемелер системасын (СТС) чыгаруу менен тыгыз байланышта.

$A=(a_{11})$ - биринчи тартиптеги матрицанын аныктагычы, же биринчи тартиптеги аныктагыч, a_{11} – элементи деп аталат.

A матрицасынын аныктагычынын белгилениши:

$$\Delta,\ \det A \quad же \quad |A|$$

$A=(a_{ij})$ - экинчи тартиптеги матрицанын аныктагычы, же экинчи тартиптеги аныктагыч деп $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ санын атайбыз жана төмөндөгү формула менен аныкталат:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

$A=(a_{ij})$ - үчүнчү тартиптеги матрицанын аныктагычы, же үчүнчү тартиптеги аныктагыч деп

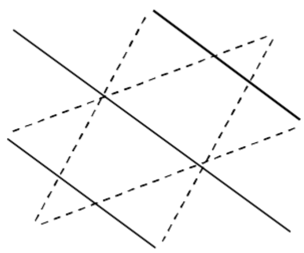
$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{31}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{33}-(a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}+$$
$$+a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33})$$

санын атайбыз жана төмөндөгү формула менен аныкталат:

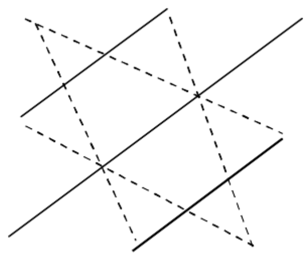
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{33} -$$

$$-(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$

Аныктагычтын шарттары формулага киргизилген белгилерди "***үч бурчтуктар эрежеси***" деп аталган схеманы колдонуу менен эстеп калуу оңой: аныктагычтын эсептелиши алты мүчөнүн алгебралык суммасы болуп саналат, мында плюс белгисинде биринчи (башкы) диагоналынын элементтеринин көбөйтүндүсү жана биринчи негизги диагоналына параллелдүү жаткан аныктагычтагы тең жактуу эки үч бурчтуктарды түзгөн элементтердин көбөйтүндүлөрүнүн суммасы; минус белгисинде экинчи (кошумча) диагоналынын элементтеринин көбөйтүндүсү жана экинчи кошумча диагоналына параллелдүү жаткан аныктагычтагы тең жактуу эки үч бурчтуктарды түзгөн элементтердин көбөйтүндүлөрүнүн суммасы. Төмөндөгү схемада көрсөтүлгөн:



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Үчүнчү тартиптеги аныктагычтын маанисин табуу үчүн Саррюстун эрежесин колдонсо болот: биринчи эки мамычаны оң жактагы аныктагычка алардын тартибин өзгөртпөстөн коюп, негизги диагоналы менен ага параллель элементтердин көбөйтүндүлөрүнүн суммасын түзүп, андан кийин экинчи диагоналдын элементтеринин жана ага параллель элементтердин көбөйтүндүлөрүнүн суммасын алып салуу керек:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + \\ + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

Аныктагычтардын касиеттери:

1 - эгерде аныктагычтын кандайдыр бир жолчосу (мамычасы) нөлдөрдөн гана турса, анда аныктагычтын мааниси нөлгө барабар болот.

2 - аныктагычтын эки жолчосунун (мамычасынын) ордун алмаштыруудан аныктагычтын маанисинин белгиси карама-каршысына өзгөрөт.

3 – эгерде аныктагыч бирдей эки жолчого (мамычага) ээ болсо, анда анын мааниси нөлгө барабар болот.

4 – эгерде аныктагычтын жолчолорун мамычалары менен же болбосо мамычаларын жолчолору менен алмаштырсак, анда аныктагыч өзгөрүлбөйт.

5 - эгерде аныктагычтын кандайдыр бир жолчосу (мамычасы) **k-га** барабар болгон жалпы көбөйтүүчүгө ээ болсо, анда **k** санын аныктагычтын белгисинин алдына чыгарууга болот.

6 - эгерде аныктагычтын эки жолчосунун (мамычасынын) элементтери пропорциялаш болушса, анда аныктагычтын мааниси нөлгө барабар болот.

7 - эгерде аныктагычтын кандайдыр бир жолчонуна (мамычасына) каалаган санга көбөйтүлгөн башка жолчонун (мамычанын) тиешелүү элементтери кошулса, аныктагычтын мааниси өзгөрбөйт.

n-тартиптеги квадраттык матрицасынын аныктагычы деп ар бир жолчосунан жана ар бир мамычасынан бирден гана алынган матрицасынын n элементтеринин $n!$ мүчөлөрүнө болгон көбөйтүндүлөрүнүн алгебралык суммасына барабар болгон санды айтабыз. Башкача айтканда, аныктагыч

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j)} (-1)^{r(j)} \cdot a_{1j1} \cdot a_{2j2} \cdot \ldots \cdot a_{njn}$$

формуласы менен аныкталат.

Мисалы, $n=3$ үчүн биз мурда киргизилген үчүнчү тартиптеги аныктагычты алабыз:

$$\Delta = \left(-1\right)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + \left(-1\right)^2 \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \left(-1\right)^2 \cdot a_{31} \cdot a_{21} \cdot a_{32} +$$

$$+\left(-1\right)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + \left(-1\right)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + \left(-1\right)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Матрицанын тартиби өскөн сайын аныктагычты аныктамасы боюнча эсептөө кыйындайт ($n=4$ үчүн, аныктама боюнча 24 мүчө алабыз).

Практикада n-даражадагы аныктагычтарды жолчонун же мамычанын элементтери боюнча кеңейтүүнү колдонуу менен эсептөө ыңгайлуураак. Бул ыкманы колдонуу үчүн биз минордун жана алгебралык толуктоочунун аныктамаларын киргизебиз.

n-тартиптеги аныктагычтын a_{ij} элементинин ***минору*** деп ал элемент жайгашкан i-жолчону жана j- мамычаны сызып салгандан кийинки келип чыккан $(n-1)$-тартиптеги аныктагычты айтабыз жана эки индекстүү M_{ij} тамгасы менен белгилейбиз.

Мисалы, 4-тартиптеги аныктагычтын a_{11} элементине тиешелүү минор төмөнкү үчүнчү тартиптеги аныктагыч болот:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Берилген аныктагычтын a_{ij} элементинин ***алгебралык толуктоочусу*** A_{ij} деп деп $A_{ij} = (-1)^{l+j} \cdot M_{ij}$ белгиси менен алынган $(-1)^{i+j}$ ге көбөйтүлгөн анын минорун айтабыз, б.а.

Мында $i - a_{ij}$ элементи жайгашкан жолчонун номери;

j – мамычанын номери.

Ажыратуу теоремасы. Квадраттык матрицанын аныктагычы кандайдыр бир жолчосунун же мамычасынын элементтеринин алардын тиешелүү алгебралык толуктоочуларына көбөйтүлгөн суммасына барабар:

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot A_{is} -$$

i-жолчосундагы элементтери боюнча ажыралышы;
Мында $i = 1, 2, \ldots, n.$

$$\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} \cdot A_{sj} -$$

j-жолчосундагы элементтери боюнча ажыралышы;
Мында $j = 1, 2, \ldots, m.$

- n-тартиптеги матрицанын аныктагычы (детерминанты):

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n-тартиптеги квадраттык матрицасынын аныктагычын эсептөөдө б.а. Лапластын (Пьер-Симо́н, маркиз де Лапла́с (1749 - 1827) - француз математиги, механик, физик жана астроном) формуласы менен эсептөө каралган.

Аныктагычтын биринчи жолчосунун элементтери боюнча ажыралышы:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \ldots a_{1n} \cdot A_{1n}$$

1-мисал: Аныктагычты 3-жолчосу боюнча ажыратабыз :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{31} + 1\cdot A_{32} + 1\cdot A_{33} + 0\cdot A_{34} = A_{32} + A_{33}$$

Алгебралык толуктоочуларын табабыз:

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3+6+16-24-3-4) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+4+12-16-2-3 = -3$$

Алынган жыйынтыктарды ордуна коебуз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = A_{32} + A_{33} = 6 + (-3) = 3$$

2-мисал: Аныктагычты 3-жолчосу боюнча ажыратабыз :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 13 \\ 5 & 11 & 16 & 21 \\ 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Чыгаруу:

$$\Delta = 5\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 13 \\ 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} + 11\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 13 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix} +$$

$$+16\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 13 \\ 4 & 5 & 10 \end{vmatrix} + 21\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 13 \\ 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} -$$

$$-11\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 13 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix} + 16\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 13 \\ 4 & 5 & 10 \end{vmatrix} - 21\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Алынган үчүнчү тартиптеги аныктагычтарды үч бурчтук эрежеси боюнча эсептейбиз:

$$\Delta = 5\cdot(3\cdot10\cdot10 + 7\cdot3\cdot5 + 4\cdot13\cdot5 - 5\cdot10\cdot5 - 7\cdot4\cdot10 - 3\cdot13\cdot3) -$$
$$-11\cdot(2\cdot10\cdot10 + 3\cdot3\cdot5 + 4\cdot13\cdot4 - 4\cdot10\cdot5 - 3\cdot13\cdot2 - 3\cdot4\cdot10) +$$
$$+16\cdot(2\cdot7\cdot10 + 3\cdot5\cdot5 + 3\cdot13\cdot4 - 4\cdot7\cdot5 - 5\cdot13\cdot2 - 3\cdot3\cdot10) -$$
$$-21\cdot(2\cdot7\cdot3 + 3\cdot5\cdot4 + 3\cdot10\cdot4 - 4\cdot7\cdot4 - 5\cdot10\cdot2 - 3\cdot3\cdot3) =$$
$$= 5\cdot(300 + 105 + 260 - 250 - 280 - 117) - 11\cdot(200 + 45 + 208 -$$
$$-200 - 78 - 120) + 16\cdot(140 + 75 + 156 - 140 - 130 - 90) -$$
$$-21\cdot(42 + 60 + 120 - 112 - 100 - 27) = 5\cdot18 - 11\cdot55 + 16\cdot11 -$$
$$-21\cdot(-17) = 90 - 605 + 176 + 357 = 18.$$

2.2. Крамер методу менен сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу

n өзгөрмөлүү m сызыктуу теңдемелер системасы берилсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

(1)-система берилген болсун.

Мында

a_{ij} - ***системанын (белгисиздердин) коффициенттери,***

b_i - ***бош мүчөлөрү,*** $i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ – ***каалагандай сандар***.

Белгисиздердин саны теңдемелердин санына барабар болгон жекече учурду карайлы.

Системанын матрицасынын аныктагычын табалы:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

Δ_j – матрицанын аныктагычында j –мамычасын бош мүчөлөрдүн мамычасына алмаштыруу менен A матрицасынан алынган матрица:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \dots$$

Анда эгерде системанын матрицасынын аныктагычы 0гө барабар эмес болсо, анда (1)-теңдемелер системасы чечимге ээ болот.

Төмөндөгү формулалар менен аныкталат :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \dots;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad \textbf{(2)}$$

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2 \dots n)$$

(2)- ***Крамердин формулалары*** деп аталат.

Мисалы: Крамердин методу менен системаны чыгарабыз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

1) Системанын матрицасынын аныктагычын табалы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

2) $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ аныктагычтарды эсептейбиз **:**

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

3) Алынган маанилерди Крамердин формуласына ордуна коебуз :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Жообу: -1; 1; 1.

МИСАЛДАР ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ МЕНЕН

Мисал 2.1. Аныктагычты эсепте: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

а) үч бурчтук эрежеси боюнча; б) биринчи жолчосунун элементтери боюнча ажыралышын; в) экинчи мамычасынын элементтери боюнча ажыралышын.

Чыгаруу: а)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot(-2)\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-2) + 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot(-2)\cdot(-2) -$$

$$-1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 0 = -9;$$

б) аныктагычты биринчи жолчосу боюнча ажыралышын эсептейбиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{11} + 1\cdot A_{12} + 2\cdot A_{13} = 0\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\left(1\cdot 1 - 1\cdot(-2)\right) +$$

$$+2\cdot\left(1\cdot 1 - (-2)\cdot(-2)\right) = -3 - 6 = -9\cdot,$$

в) аныктагычты экинчи мамычасы боюнча ажыралышын эсептейбиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(-1\right)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \left(-2\right)\cdot\left(-1\right)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(1\cdot1 - 1\cdot(-2)) - 2\cdot(0\cdot1 - 2\cdot(-2)) -$$

$$-1\cdot\left(0\cdot1 - 2\cdot1\right) = -3 - 8 + 2 = -9.$$

Жообу: -9

Мисал 2.2 Аныктагычты үчүнчү мамычасындагы элементтери боюнча ажыралышын эсептегиле:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Чыгаруу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(-1\right)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot 7 = -7.$$

Жообу: -7.

Мисал 2.3 Аныктагычтарды алардын касиеттеринен пайдаланып, эсептегиле:

$$a)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \qquad б)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}, \qquad в)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Чыгаруу:
а) 2-жолчонун элементтерине 1-жолчонун тиешелүү элементтерин кошобуз, ал эми 3-жолчонун элементтеринен 1-жолчонун эки эселенген элементтерин алып салабыз**:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Аныктагычты үчүнчү мамычанын элементтери боюнча ажыратабыз жана төмөндөгүнү алабыз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -6+15 = 9.$$

б) 2-жолчонун элементтерине 1-жолчонун эки эселенген элементтерин кошобуз; 3-жолчонун элементтерин 3кө көбөйтүп 1-жолчонун тиешелүү элементтеринен кемитип, аныктагычтын белгиси үчүн -2ни (3-жолчонун элементтеринин жалпы коэффициентин) чыгарабыз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -10 & -10 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 0 = 0$$

(3-касиет боюнча эки жолчо бирдей).

в) 3-жолчонун элементтерине 1-жолчонун тиешелүү элементтерин кошуп, аныктагычты 3-жолчонун элементтери боюнча ажыратабыз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \left(1 - (-1)\right) = -4.$$

Жообу: а) 9; б) 0; в) -4.

Мисал 2.4. Матрицанын аныктагычын тапкыла.

$$A = \begin{pmatrix} \sin 3x & -\cos 3x \\ \cos 3x & \sin 3x \end{pmatrix}$$

Чыгаруу: $\Delta = \begin{pmatrix} \sin 3x & -\cos 3x \\ \cos 3x & \sin 3x \end{pmatrix} = \sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$

Жообу: 1.

Мисал 2.5. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$\begin{vmatrix} 2x^2-7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} < 1$$

Чыгаруу: Аныктагычты ачалы: $2x^2-7-6x<1$,
Окшош мүчөлөрүн топтоп, төмөндөгүгө келтиребиз:

$$2x^2-6x-8<0$$

Квадраттык үч мүчө кылып сызыктуу көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз: $2\cdot(x-4)\cdot(x+1)<0$. Бул барабарсыздыкты интервалдар методу менен чыгарабыз, анда алабыз: $x\in(-1;4)$.

Жообу: $x\in(-1;4)$

Мисал 2.6 Теңдемени чыгаргыла: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & x-1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5.$

Чыгаруу: Аныктагычты ачабыз:

$$1-x+x-2x^2+2x-2=-5,$$

Окшош мүчөлөрүн топтойбуз $-2x^2+2x+4=0$,
теңдеменин эки бөлүгүн тең –2ге бөлөбүз: $x^2-x-2=0$.
Виеттин теоремасы боюнча теңдеменин тамырлары
-1 жана 2 сандары болуп саналат.

Жообу: $x_1=-1;\quad x_2=2.$

Мисал 2.7. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -5x \\ 7x & 2 & -1 \end{vmatrix} > -24.$$

Чыгаруу: Аныктагычты ачабыз:

$$-3x - 70x^2 + 6 - 21x + 10x^2 + 6 > -24$$

Окшош мүчөлөрүн топтоп, төмөндөгүгө келтиребиз:

$$-60x^2 - 24x + 36 > 0$$

барабарсыздыктын эки бөлүгүн тең -12 ге бөлөбүз, барабарсыздык белгиси өзгөрөт: $5x^2 + 2x - 3 < 0.$

Сызыктуу көп мүчөлөрдүн көбөйтүндүсүнө квадраттык үч мүчөгө ажыратабыз:

$$5 \cdot (x+1) \cdot (x - 0,6) < 0.$$

Интервалдар ыкмасына ылайык чечими төмөндөгүдөй көрүнүштө жазылат: $x \in (-1;\ 0,6)$.

Жообу: $x \in (-1;\ 0,6)$.

Мисал 2.8. Теңдештикти далилдегиле:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}.$$

Чыгаруу: Эгерде теңдештиктин эки бөлүгүнөн тең табылган аныктагычтары бирдей болсо, анда теңдештик далилденет. Биринчи сол жагындагы аныктагычты маанисин табабыз:

$$\Delta_{сол.} = 27 + 16 - 10 - 12 - 30 + 12 = 3.$$

Оң тараптагы аныктагычтын мааниси:

$$\Delta_{он.} = 99 - 16 - 70 - 84 + 30 + 44 = 3$$

теңдештик далилденди.

Мисал 2.9. Төртүнчү тартиптеги аныктагычты эсептегиле**:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Чыгаруу: Биринчи жолчодогу элементтери боюнча аныктагычты ажыратабыз:

$$\Delta = -5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -4 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+3}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -5\cdot 74 - (-15) - 4\cdot(-31) - 33 =$$

$$= -370 + 15 + 124 - 33 = -264$$

Жообу: -264

Мисал 2.10. Аныктагычты эсептегиле: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Чыгаруу: Аныктагычтын белгисинин сыртына
4-мамычанын жалпы көбөйтүүчүсүн алалы. Үчүнчү жана экинчи жолчолордун элементтеринен биринчи жолчонун элементтерин алып салып, биринчи жолчонун элементтерин 4-жолчонун элементтерин кошуп, андан кийин аныктагычты 4-мамычанын элементтери боюнча ажыратабыз:

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

3-жолчонун элементтерине 1-жолчонун элементтерин 4кө көбөйтүп кошуп, 2-мамычанын элементтери боюнча аныктагычты ажыратабыз:

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \left(4 - (7)\right) = -22$$

Жообу: -22

Мисал 2.11. Крамер формуласы боюнча сызыктуу теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9; \\ x + 2y - 3z = 14; \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$$

Чыгаруу: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 27 + 8 - 12 - 3 + 24 = -6.$

Бул системанын аныктагычы нөлдөн айырмалуу, ошондуктан система жалгыз чыгарылышка ээ. Биз аны Крамердин формуласынын жардамы менен табабыз.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 18 - 144 + 112 - 64 - 42 + 108 = -12.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 81 + 48 - 84 - 9 + 96 = -18.$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-18}{-6} = 3.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 64 + 126 + 36 - 54 - 112 - 48 = 12.$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{12}{-6} = -2.$$

Жообу: $x = 2, y = 3, z = -2.$

Мисал 2.12. Крамердин формуласы боюнча сызыктуу теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7; \\ z - 3y + 2z = 5; \\ z + y + z = 3. \end{cases}$$

Чыгаруу: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 3 + 9 - 2 - 2 = 9 \neq 0;$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -21 + 12 + 15 - \left(-27\right) - 14 - 10 = 9;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 14 + 9 - 15 - 6 - 7 = 0;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 10 + 7 + 21 - 5 - 6 = 18.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{9} = 0; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

Жообу: $x = 1, y = 0, z = 2.$

“Аныктагыч. Крамер методу менен СТСсын чыгаруу” темалары боюнча өз алдынча чыгарууга тапшырмалар

Группа А

1.А. Аныктагычтарды эсептегиле:

а) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 2+\alpha & 1-2\alpha \end{vmatrix}$

Жообу: а) 0; б) $\alpha^2 + 1$.

2.А. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $\begin{vmatrix} 3x^2 - 7 & 4 \\ 3x & 2 \end{vmatrix} < 4$ б) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ x^2 - 2 & x-1 \end{vmatrix} \geq -1$

Жообу: а) $x \in (-1;3)$; б) $x \in -\frac{1}{3}; 2$.

3.А. Крамердин формуласынан пайдаланып, сызыктуу теңдемелер системаларын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 4x - 2y = 4; \\ y - 3x + 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x + 7y + 13 = 0; \\ 5x - 19y = 14. \end{cases}$

Жообу: а) $x = 0, y = -2;$ б) $x = -1, y = -1.$

4.А. Аныктагычтарды эсептегиле:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ b & 0 & 0 \\ -b & 0 & b \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

Жообу: а) $-b^2$ б) -2 в) $-1.$

5.А. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $\begin{vmatrix} x-2 & 3 & x \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$

Жообу: а) $x = -3;$ б) $x_1 = 0,\ x_2 = 1.$

6.А. Эгерде $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ болсо, $\left|(A-B)\cdot C\right|$ эсептегиле.

Жообу: -88

7.А. Төртүнчү тартиптеги аныктагычтарды эсептегиле:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Жообу: а) 1; б) 0; в) -58.

8.А. Теңдештикти далилде:

$$4\cos 2\beta\cdot\cos\beta=\begin{vmatrix} 2\cos\beta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\beta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\beta \end{vmatrix}$$

9.А.-12.А. мисалдарда Крамердин формуласы боюнча теңдемелер системаларын чыгаргыла.

9.А. $\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$ *Жообу*: $x=1;\ y=1;\ z=1.$

10.А. $\begin{cases} 5x+8y+z=2; \\ 3x-2y+6z=-7; \\ 2x+y-z=-5. \end{cases}$ *Жообу*: $x=-3;\ y=2;\ z=1$

11.А. $\begin{cases} 3x+2y+1=3; \\ 5x-2y-2z=3; \\ x+y-z=-2. \end{cases}$ *Жообу*: $x=1; y=-1;\ z=2.$

12.А. $\begin{cases} x+y-z=36; \\ x+z-y=13; \\ y+z-x=7. \end{cases}$ *Жообу*: $x=24{,}5;\ y=21{,}5;\ z=10.$

13А. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3=9, \\ x_1+2x_2-3x_3=14, \\ 3x_1+4x_2+x_3=16. \end{cases}$

Жообу: $x_1=\dfrac{-12}{-6}=2$, $x_2=\dfrac{-18}{-6}=3$, $x_3=\dfrac{12}{-6}=-2$.

“Аныктагыч. Крамер методу менен СТСсын чыгаруу” темалары боюнча өз алдынча чыгарууга тапшырмалар

Группа В

1.В. Аныктагычтарды эсептегиле:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{б)}\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{в)}\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Жообу: а) -12; б) -8; в) 4;

2.В. Барабарсыздыктарды чыгаргыла:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0, \qquad \text{б)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} < 0.$$

Жообу: а) $x \in (-6;-4)$; б) $x \in (-3;\infty)$.

3.В. Төртүнчү тартиптеги аныктагычтарды эсептегиле:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \text{б)}\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{в)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Жообу: а) -96; б) 1; в) -9.

4.В. Эгерде $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ берилсе, белгисиз λ үчүн $|A-\lambda E|=0$ теңдемени чыгаргыла:

Жообу: $\lambda_1=0;\ \lambda_2=0;\ \lambda_3=6.$

5.В. Теңдештикти далилдегиле:

$$\begin{vmatrix}\cos\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2\cos\lambda & 1\\ 0 & 1 & 2\cos\lambda\end{vmatrix}=\cos 3\lambda$$

6.В.-14.В. мисалдарда Крамердин формуласы боюнча теңдемелер системаларын чыгаргыла.

6.В. $\begin{cases}3x+4y=6;\\5x+7y=8.\end{cases}$ *Жообу*: $x=10;\ y=-6.$

7.В. $\begin{cases} x\cos\lambda - y\sin\lambda = \cos 2\lambda; \\ x\sin\lambda + y\cos\lambda = \sin 2\lambda. \end{cases}$ *Жообу*: $x = \cos\lambda;\ y = \sin\lambda.$

8.В. $\begin{cases} 2x - 4y - 9z = 13; \\ x + 2y + 6z + 4 = 0; \\ 7x - y + 9z = 5. \end{cases}$ *Жообу*: $x = 2; y = 0;\ z = -1$

9.В. $\begin{cases} x + y + z = a; \\ z - y + z = b; \\ x + y - z = c. \end{cases}$ *Жообу*: $x = \dfrac{b+c}{2}; y = \dfrac{a-b}{2}; z = \dfrac{a-c}{2}.$

10.В. $\begin{cases} 2x - 4y - 9z = 7; \\ 7x + 3y - 6z = 16; \\ 7x - 9y - 9z = 7. \end{cases}$ *Жообу*: $x = 1; y = 1; z = -1.$

11.В. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15; \\ x + y + 5z = 16; \\ 3x - 2y + z = 1. \end{cases}$ *Жообу*: $x = 0;\ y = 1;\ z = 3.$

12.В. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36; \end{cases}$ *Жообу*: $x = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1.$

13.В. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$ *Жообу*: $x = 3;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1.$

14.B. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ *Жообу*: $x = -3;\ x_2 = 2;\ x_3 = 1.$

ТЕСКЕРИ МАТРИЦА. ТЕСКЕРИ МАТРИЦАНЫ КОЛДОНУУ МЕНЕН СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАЛАРЫН ЧЫГАРУУ

3.1. Тескери матрица.

A квадраттык кубулбаган матрица болсун, б.а. $\det A \neq 0$. A^{-1} матрицасы $A \cdot A^{-1} = E$ шартты канааттандырса, анда A матрицасына ***тескери матрица*** деп аталат.

A матрицанын кубулбаган болушунун зарыл шарты анын аныктагычы нөлдөн айырмалуу болушу керек.

$n \times n$ өлчөмүндөгү тескери матрицаны эсептөө формуласы төмөндөгүдөй көрүнүштө:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Мында $detA$ – A матрицасынын аныктагычы, A_{ij}– A матрицасынын a_{ij} элементи боюнча алгебралык толуктоочусу.

Атап айтканда, 3×3 өлчөмдүү матрицасы үчүн:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

көрүнүштө жазабыз.

Тескери матрицаны колдонуу менен сызыктуу теңдемелер системасынын (СТСнын) чечимдерин табууга болот.

n белгисиздүү n сызыктуу теңдемелердин системасын чечүү талап кылынсын:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Бул система матрица түрүндө төмөнкүчө жазылат:

$$A \cdot X = B$$

Мында

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

3.2. Теңдемелер системасын матрицалык ыкма менен чыгаруу

Теңдемелер системасынын матрицалык формада табалы: Матрицаны көбөйтүү эрежесинен жана матрицалардын теңдештик шартын колдонуу менен (2)-теңдемелер системасын төмөнкүчө көрүнүштөрдө чыгарууга мүмкүн:

$$A \cdot X = B;$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B;$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Ошентип, белгисиз X матрицасын табуу жетиштүү, ал үчүн A^{-1} табабыз жана аны B бош мүчөлөрдүн матрицасына көбөйтөбүз.

МИСАЛДАР ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ МЕНЕН

Мисал 3.1. Берилген матрицалардын тескери матрицасын тапкыла:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Чыгаруу: Матрицанын аныктагычы $A = -17 \neq 0$.

A матрицасынын элементтеринин алгебралык толуктоочторун табабыз:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 2 = 2;$ $A_{12} = (-1)^3 \cdot 5 = -5;$

$A_{21} = (-1)^3 \cdot 5 = -5;$ $A_{22} = (-1)^4 \cdot 4 = 4.$

A матрицасы үчүн тескери матрица болгон A^{-1}ны төмөнкүдөй көрүнүштө жазабыз:

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{4}{17} \end{pmatrix}.$$

Текшеребиз:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

б) B матрицасынын аныктагычы -7 ге барабар.

B матрицасынын элементтеринин алгебралык толуктоочторун табабыз:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2; \qquad A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2; \qquad A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2; \qquad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1; \qquad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-8;$$

Жыйынтыгында, $B^{-1}=-\dfrac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -8\end{pmatrix}.$

Жообу: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{17} & \dfrac{5}{17}\\ \dfrac{5}{17} & -\dfrac{4}{17}\end{pmatrix};$ $\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{7} & \dfrac{1}{7} & -\dfrac{1}{7}\\ \dfrac{3}{7} & \dfrac{2}{7} & -\dfrac{2}{7}\\ \dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} & \dfrac{8}{7}\end{pmatrix}.$

Мисал 3.2. Тескери матрицанын жардамы менен СТСнын чечимдерин тапкыла:

а) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 5; \\ x + 3y + z = 1; \\ 5x + 3y + 4z = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 4y = 11; \\ 5y + 6z = 28; \\ x + 2z = 7. \end{cases}$

*Чыгаруу***.** Матрица түрүндө төмөнкүчө жазабыз:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

а) A матрицасынын аныктагычын эсептейбиз:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

A матрицасынын аныктагычы нөлдөн айырмалуу болгондуктан, A^{-1} тескери матрицасы жашайт жана системанын жалгыз чечими бар. Тескери матрицаны табабыз. Бул үчүн A матрицасынын бардык элементтеринин алгебралык толуктоочторун эсептейбиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=-2;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3&2\\5&4\end{vmatrix}=2;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3&2\\5&3\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}=-4;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=7;$$

Натыйжада, $A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}9&-2&-4\\1&2&-1\\-12&1&7\end{pmatrix}.$

Системанын чыгарылышын төмөндөгүдөй көрүнүштө жазууга болот:

$$X=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}9&-2&-4\\1&2&-1\\-12&1&7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}43\\7\\-59\end{pmatrix}$$

б) B матрицасынын аныктагычын эсептейбиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&4&0\\0&5&6\\1&0&1\end{vmatrix}=54\neq0$$

B матрицасынын баардык элементтеринин алгебралык толуктоочторун табабыз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5&6\\0&2\end{vmatrix}=10;\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}0&6\\1&2\end{vmatrix}=6;\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}0&5\\1&0\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}4&0\\0&2\end{vmatrix}=-8;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}3&0\\1&2\end{vmatrix}=6;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}3&4\\1&0\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{31}=-\begin{vmatrix}4&0\\5&6\end{vmatrix}=24;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3&0\\0&6\end{vmatrix}=-18;\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}3&4\\0&5\end{vmatrix}=15.$$

Ошентип, тескери матрица жана СТСнын чечими төмөндөгүдөй: $B^{-1}=\dfrac{1}{54}\cdot\begin{pmatrix}10&-8&24\\6&6&-18\\-5&4&15\end{pmatrix}$,

$$X=\frac{1}{54}\cdot\begin{pmatrix}10&-8&24\\6&6&-18\\-5&4&15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\28\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Жообу: а) $x=\dfrac{43}{5},\ \ y=\dfrac{7}{5},\ \ z=\dfrac{-59}{5};$

б) $x=1,\ \ y=2,\ \ z=3.$

Мисал 3.3. Матрицалык эсептөөнүн жардамы менен системаны чечкиле:

$$\begin{cases} 2x-4y+9z=28; \\ 7x+3y-6z=-1; \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$$

Чыгаруу: Берилген СТСны матрицалык түрдө көрсөтүшүбүз мүмкүн:

$$A\cdot X=B$$

Мында $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 28 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

A матрицасынын аныктагычын эсептейбиз:

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{vmatrix}=348\neq 0.$$

Тескери матрицасын табабыз: $A^{-1}=\dfrac{1}{348}\cdot\begin{pmatrix} 27 & 45 & -3 \\ 21 & -81 & 75 \\ 42 & -46 & 34 \end{pmatrix}$.

Демек, бул системанын чечимин төмөндөгүдөй көрүнүштө жазабыз:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{348}\cdot\begin{pmatrix} 27 & 45 & -3 \\ 21 & -81 & 75 \\ 42 & -46 & 34 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 28 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot$$

Жообу: $x = 2,\ y = 3,\ z = 4.$

Мисал 3.4. Теңдемеден X матрицасын тапкыла.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чыгаруу: Белгиленишин киргизебиз:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Берилген теңдемени төмөндөгүдөй жазууга мүмкүн:

$$X \cdot A = B$$

Теңдеменин эки жагына тең A^{-1} ди көбөйтүп, төмөндөгүнү алабыз:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1},$$

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Берилген теңдемени чечүү үчүн тескерисин табуу керек б.а. A^{-1} матрицасын жана A^{-1} матрицасы B мамыча-матрицага көбөйтүлөт.

A матрицасынын аныктагычы $A = 1 \neq 0$. A матрицасы үчүн тескери матрицаны табабыз. Алгебралык толуктоочторун эсептейбиз:

$$A_{11} = 3, \qquad A_{12} = -1, \qquad A_{21} = -5, \qquad A_{22} = 2.$$

Демек, тескери матрица жана берилген теңдеменин чечими төмөнкү көрүнүшкө ээ болот:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Жообу: $\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

“Тескери матрица. СТСны тескери матрицанын жардамы менен чыгаруу” темалары боюнча өз алдынча чыгарууга тапшырмалар

Группа А

1.А. Эсептегиле:

а) $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}^{-1}$, б) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$, в) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$.

Жообу: а) $\begin{pmatrix}\frac{9}{2} & -\frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

2.А. Берилген матрицаларга тескери матрицаны тапкыла:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Жообу: а) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -1 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

3А. Матрицаларды көбөйтүүнү аткаргыла:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

Жообу: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

4.А. СТСны матрицалык эсептөөлөрдү колдонуу менен чечкиле:

а) $\begin{cases} x+2y=-4; \\ 3x+4y=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+4y-5z=8; \\ 2x+3y-4z=9; \\ x-2y-z=6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y-z=3; \\ 5x+12y-2z=-1; \\ 4x+9y-2z=2. \end{cases}$

Жообу: а) $x=14,\ y=-9;$ б) $x=2,\ y=-1,\ z=-2;$ в) $x=3,\ y=-2,\ z=-4.$

5.А. Теңдемеден X матрицасын тапкыла:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$ б) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \frac{10}{17};$ г) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T$

Жообу: а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ в) $\begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

“Тескери матрица. СТСсын тескери матрицанын жардамы менен чыгаруу” темалары боюнча өз алдынча чыгарууга тапшырмалар

Группа В

1.В. Эсептегиле:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

Жообу: а) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.В. Берилген матрицаларга тескери матрицасын эсептегиле:

а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Жообу: а) $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3.В. СТСны тескери матрицанын жардамы менен эсептегиле:

а) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 6; \\ 5x + y + 2z = 12; \\ 3x - y + z = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + 2y + z = 0; \\ 7x - 10y - 5z = -2; \\ 4x - 7y - 6z = -8. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 7; \\ x + 2y + z = 4; \\ 3x - y + 2z = -1. \end{cases}$

Жообу: а) $x = 2,\ y = 4,\ z = -1;$ б) $x = -1,\ y = -2,\ z = 3;$
в) $x = 1;\ y = 2;\ z = -1.$

4.В. Матрицалардын көбөйтүндүсүн эсептегиле:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Жообу: а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2{,}5 & 1 \\ -0{,}5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.B. Теңдемеден X матрицасын тапкыла:

$$\text{а) } X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 7 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Жообу: а) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН ГАУССТУН МЕТОДУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

4.1. Матрицанын рангы жана аны эсептөө

m-жолчодон n-мамычадан турган тик бурчтуу A матрицасын карайбыз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Бул матрицанын k-жолчосун жана k-мамычасын сызып k-тартиптеги квадраттык матрицаны бөлүп алууга болот. Мындай камтылуучу матрицанын аныктагычы A матрицасынын k-тартиптеги минору деп аталат. Мисалы, 3 жолчо жана 4 мамычадан турган A матрицасы үчүн биринчи, экинчи жана үчүнчү тартиптеги камтылуучу аныктагычтарды алабыз. Матрицанын кээ бир минорлору нөлгө барабар болушу мүмкүн, кээ бирлери нөлдөн айырмалуу болушу мүмкүн.

Матрицанын ***рангы*** деп бул матрицанын нөлдөн айырмалуу болгон минорлорунун эң жогорку тартиби аталат.

Тартиби берилген матрицанын тартибине барабар болгон матрицанын нөлдөн башка ар кандай минорлору матрицанын ***базистик минору*** деп аталат.

A матрицанын рангы A же $r(A)$ менен белгиленет. Матрицанын рангынын аныктамасынан төмөнкүдөй:

а) A матрицасынын рангы бул матрицанын өлчөмдөрүнүн кичинесинен ашып кетпейт, б.а. $r(A)\le \min(m;n)$;

б) $r(A)=0$ болот качан гана матрицанын баардык элементтери нөлгө барабар болсо;

в) n тартиптеги квадраттык матрица үчүн $r(A)=n$ болот, качан гана A-өзгөчөлөнбөгөн матрица болсо.

Ошентип, мисалы, $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ матрица үчүн

A матрицасынын элементтеринен биринчи тартиптеги 12 минор, экинчи тартиптеги 18 минор түзүлүшү мүмкүн:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

жана үчүнчү тартиптеги төрт минор:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

A матрицасынын бардык үчүнчү тартиптеги минорлорунун нөлгө барабар экенин, ал эми экинчи тартиптеги минорлорунун нөлгө барабар эмес экенин текшерүү оңой (жогоруда саналган экинчи тартиптеги минорлорунун биринчиси нөлдөн айырмаланып турат). Демек, A матрицанын рангы 2ге барабар деп айтабыз.

Жалпысынан алганда, матрицанын рангын аныктоо үчүн бардык минорлорду карап чыгуу бир топ түйшүктүү. Бул маселени жеңилдетүү үчүн матрицанын рангына таасирин тийгизбөөчү төмөндөгүдөй элементардык өзгөртүп түзүүлөр колдонулат:

1) нөлдүк катарларды алып салуу;

2) матрицанын жолчолорунун (мамычаларынын) бардык элементтерин нөлгө барабар эмес санга көбөйтүү;

3) матрицанын жолчолорунун (мамычаларынын) орундарын алмаштыруу;

4) матрицанын кандайдыр бир жолчосунун (мамычасынын) ар бир элементтерине башка бир жолчонун (мамычанын) жалпы мүчөгө көбөйтүлгөн тиешелүү элементтерин кошуу;

5) матрицанын транспонирлөө.

4.2. Кронекер-Капеллинин теоремасы

Матрицанын рангын табуу сызыктуу теңдемелер системасынын чечилишин жөнөкөйлөтүүгө мүмкүндүк берет.

n белгисиздүү, m сызыктуу теңдемелер системасын карайбыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Эгерде теңдемелер системасы жок дегенде бир чечимге ээ болсо, ***биргелешкен*** деп аталат. Эгерде системанын чечими жок болсо, анда ал ***биргелешпеген*** деп аталат.

Биргелешкен теңдемелер системасы бир гана чечимге ээ болсо, система ***аныкталган***, ал эми бир нече чечимге ээ болсо, ***аныкталбаган*** деп аталат.

Системанын биргелешкендиги Кронекер-Капеллинин теоремасынын жардамы менен аныкталат.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ жана}$$

(2)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

(2) - системанын негизги матрицасы жана кеңейтилген матрицасы.

Сызыктуу теңдемелер системасы биргелешкен (чечимге ээ) болуп саналат, эгерде системанын A матрицасынын рангы (белгисиздердин алдындагы коэффициенттеринен түзүлгөн матрица) кеңейтилген $\overline{A}$ матрицанын рангына барабар болсо (системадагы белгисиздердин алдындагы коэффициенттеринен түзүлгөн матрицасына бош мүчөлөрдүн мамычасын кошкондо алынган матрица).

$$rangA = rang\overline{A}$$

Кронекер-Капелли теоремасынан төмөнкүдөй жыйынтык чыгат:

1. Эгерде биргелешкен системанын матрицасынын рангы өзгөрмөлөрдүн санына барабар болсо, анда система аныкталган жана жалгыз чечимге ээ болот б.а.

$$rangA = rang\overline{A} = n$$

2. Эгерде биргелешкен системанын матрицасынын рангы өзгөрмөлөрдүн санынан аз болсо, анда система аныкталбаган жана чечимдердин чексиз жыйындысына ээ болот б.а.

$$rangA = rang\overline{A} < n$$

3. Эгерде $rangA < rang\overline{A}$ *болсо, анда* система биргелешпеген жана чечимге ээ эмес.

Биргелешкен системаны изилдөөдө негизги аппарат сызыктуу теңдемелер жана анын чечимдерин табуу кеңейтилген матрицанын жолчолорунун элементардык өзгөртүлүүшү болуп саналат.

Аларга төмөнкүлөр кирет:

– нөлдүк жолчону алып салуу;

– матрицанын бардык элементтерин нөлгө барабар эмес санга көбөйтүү;

– матрицанын жолчолорунун иретин өзгөртүү;

– бир жолчонун элементтерине башка жолчонун тиешелүү элементтерине кошуу, нөлдөн башка каалаган санга көбөйтүү.

Теңдемелер системасын чечүү үчүн төмөнкү схеманы кароого болот.

1. Элементардык жолчолорду өзгөртүүнүн жардамы менен системанын кеңейтилген матрицасын жөнөкөйлөтүлгөн түргө келтиребиз.

2. Кронекер-Капелли теоремасын колдонуу менен биргелешкен экендигин текшеребиз.

3. Теңдемелердин жөнөкөйлөштүрүлгөн системасын чечебиз, эгерде ал биргелешкен болсо.

4.3. Гаусстун ыкмасы

Матрицанын рангын издөөнү Гаусс ыкмасы боюнча системанын чечими менен айкалыштыруу ыңгайлуу, ал өзгөрмөлөрдүн удаалаш алынып салынышын камсыз кылат жана элементардык өзгөртүүлөрдүн жардамы менен СТСга тең күчтүү (же уч бурчтук) системага келтирилип, эгерде система жалгыз чечимге ээ болсо, ал системанын акыркы (номерине карата) теңдемесинен биринчи теңдемени көздөй бардык белгисиздер удаалаш табылат.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

n белгисиздүү m сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу деп, бул системага койгондо ар бир теңдемени теңдеш барабардыкка айландыруучу $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ ...,\ x_n = c_n$ сандарынын жыйындысын айтабыз.

Эгерде теңдемелердин саны белгисиздердин санынан көп же аз болуп калган учурда, жогорку ыкмаларды колдонууга болбойт. Бардык түрдөгү теңдемелердин системасын чыгарууга Гаусстун ыкмасын же белгисиздерди чыгарып салуу ыкмасы деп аталган жалпы ыкманы колдонууга ыңгайлуу. Бул ыкманы мисалдардын жардамы менен кароого өтөбүз.

МИСАЛДАР ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ МЕНЕН

Мисал 4.1. Элементардык өзгөртүүлөрдүн жардамы менен матрицанын рангын эсептегиле:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Чыгаруу: Үчүнчү жолчодон эки эселенген биринчини, экинчи мамычаны 2ге азайтып, биринчи мамычадан үч эселенген экинчини, үчүнчүдөн экинчини, төртүнчүдөн эки эселенген экинчини кемитип, биз удаалаш түрдө алабыз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

мында ~ белгиси аны менен байланышкан матрицалар бири-биринен элементардык өзгөртүүлөр аркылуу алынганын жана демек, бирдей рангга ээ экендигин билдирет.

Андан ары үчүнчү жолчого үч эселенген экинчи мамычаны кошуп, биринчи мамычаны 2ге азайтып, үчүнчүгө кошуп, андан кийин төртүнчүдөн кемитип, биринчи эки мамычаны алмаштырсак, биз төмөндөгүнү алабыз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Жообу: Берилген матрицанын рангы 2 ге барабар.

Мисал 4.2. Гаусстун ыкмасы менен сызыктуу теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Чыгаруу: Кеңейтилген матрицаны түзөбүз, анда вертикалдуу тилке теңдештиктин оң тарабын солдон бөлөт (теңдештик белгисин белгилөө үчүн). Негизги диагоналдын астында жаткан элементтерди нөлгө айландыруу ыңгайлуу болушу үчүн (СТСны үч бурчтук формага келтирүүдө) биз биринчи жолчого экинчи теңдеменин коэффициенттерин жазабыз жана сызыктуу теңдемелер системасынын кеңейтилген матрицасына элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзөбүз:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right)$$

бул жерде a_{21} элементти жокко чыгаруу үчүн биринчи жолчо -2ге көбөйтүлөт жана экинчи жолчого кошулуп, экинчи жолчого жыйынтык жазылат. a_{31} элементти жокко чыгаруу үчүн биринчи жолчо -3гө көбөйтүлөт жана үчүнчү жолчого кошулуп, жыйынтыгы үчүнчү жолчого жазылат.

Эми a_{32} элементти жокко чыгара баштайбыз, элементтерден алып салуу үчүн үчүнчү жолчодон экинчи жолчонун тиешелүү элементтерин кемитебиз, анда:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & \bigg| & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & \bigg| & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & \bigg| & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & \bigg| & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & \bigg| & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bigg| & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & \bigg| & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & \bigg| & 17 \end{pmatrix},$$

Бул учурда, матрицадагы нөлдүк жолчо жок кылынышы керек эле, ал аткарылды. Натыйжада матрицада нөлдөн башка аныктагычтын максималдуу өлчөмү 2×2 өлчөмүнө ээ, б.а. системадагы матрицанын рангы $rangA = 2$ жана кеңейтилген $\overline{A}$ матрицанын рангы дагы 2ге барабар. Анда, Кронекер-Капелли теоремасы боюнча, теңдемелер системасы биргелешкен, бирок белгисиздердин саны $n = 4$ матрицанын рангынан көп болгондуктан $rangA = rang\overline{A} = 2 < n = 4$, системанын чексиз көп чечимдери бар.

x_1 *жана* x_2 өзгөрмөлөрдү сол жагына калтыралы, аны биз базистик деп кабыл алабыз (алар үчүн коэффициенттеринен түзүлгөн аныктагычы нөлдөн айырмалуу, б.а. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$).

Башка эркин өзгөрмөлөр x_3, x_4 тү теңдеменин оң бөлүгүнө которобуз. Натыйжада, биз төмөндөгүдөй системаны алабыз:

$$x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4;$$

$$-5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4,$$

мындан $x_2 = -\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4,$

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Эркин x_3 *жана* x_4 өзгөрмөлөргө $x_3 = t$ *жана* $x_4 = u$, *мында* $u, t \in R$ маанилерди берип, биз жалпы СТСнын чечими деп аталган чечимди алабыз:

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}u;$$

$$x_2 = -\frac{17}{5} + t - \frac{7}{5}u;$$

$$x_3 = t;$$

$$x_4 = u.$$

Эркин өзгөрмөлөргө x_3 *жана* x_4 конкреттүү маанилери берүү менен системасынын жекече чечимдерди табабыз. Эгерде эркин өзгөрмөлөр нөлгө барабар маанилерди алса, анда алынган чечим базистик деп аталат:

$$x_1 = \frac{4}{5};$$

$$x_2 = -\frac{17}{2};$$

$$x_3 = x_4 = 0.$$

Бир нече базистик чечимдер болушу мүмкүн, бардыгы эркин өзгөрмөлөрдү тандоодон көз каранды.

Мисал 4.3. Кронеккер-Капеллинин теоремасын колдонуу менен изилдеп, андан кийин Гаусс ыкмасы менен сызыктуу теңдемелер системасын чечебиз:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2; \\ x_1-x_2+x_3=0; \\ x_1+3x_2-x_3=-2; \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0. \end{cases}$$

Чыгаруу. Теңдемелер системасын чечүү үчүн биз кеңейтилген матрицасын жана элементардык өзгөртүп түзүү аркылуу карап чыгабыз (андан кийин матрицанын рангын издөө Гаусс ыкмасы боюнча чечимин табуу менен бириктирилет).

a_{11} элементтеринин астындагы бардык элементтерди нөлгө айлантабыз. Бул үчүн экинчи жана үчүнчүдөн биринчи катарды, төртүнчүдөн үч эселенген биринчи катарды алып таштайбыз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right).$$

Андан ары, экинчиге үч эселенген үчүнчү жолчону жана төртүнчүгө эки эселенген үчүнчү жолчону кошуп, табабыз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right).$$

Кайталанган төртүнчү катарды алып салгандан жана экинчи жана үчүнчү катарларды алмаштыргандан кийин, акыркы матрица түзүлүп, андан $rangA = rang\bar{A} = 3$ болгондугу көрүнүп турат.

Демек, берилген система биргелешкен жана аныкталган экендиги белгилүү. Белгисиздердин саны матрицанын рангына барабар болсо, анда ал жалгыз чечимге ээ болот. Теңдемелер системасына кайрылып көрөбүз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_2 - 4x_3 = -4; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Бул системанын чечими Гаусс ыкмасын колдонуу менен алабыз. Гаусс ыкмасын колдонууну көрсөтөлү:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Акыркы кеңейтилген матрица системага тең күчтүү:

$$\begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ошентип, системанын жалгыз чечими $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$ болот.

Жообу: $x_1 = -1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1.$

Мисал 4.4. Сызыктуу теңдемелер системасынын жалпы чечимин Кронекера-Капеллинин теоремасы менен изилдеп, Гаусс ыкмасы менен тапкыла.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0; \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=4; \\ x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-4; \\ x_1+8x_2+7x_3-7x_4=-8. \end{cases}$$

Чыгаруу. Бул системанын кеңейтилген матрицасын жазып алып, элементардык өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин биз төмөндөгүнү алабыз:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

мындан $rang A = rang \bar{A} = 2$, демек, система биргелешкен.

Бирдей белгисиздердин саны матрицанын рангынан көп, ошондуктан система

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0; \\ -3x_2-2x_3+3x_4=4. \end{cases}$$

аныкталбаган жана чексиз көп чечимге ээ болот.

Сызыктуу теңдемелер системасынын жалпы чечимин табуу үчүн эркин өзгөрмөлөрдү x_3 *жана* x_4 алабыз, матрицада төртүнчү, бешинчи мамычалар x_3 *жана* x_4түн коэффициенттери үчүн ылайык келет.

$$\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 & -3 \end{array}$$

Гаусстун ыкмасы менен акыркы өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин биз төмөнкүлөрдү алабыз:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Системанын жалпы чечимин төмөнкүчө жазууга болот:

$$x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4;$$
$$x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4.$$

Жообу: $$\begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4; \\ x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4. \end{array}$$

Мисал 4.5. Сызыктуу теңдемелер системасын изилдегиле:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4; \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6. \end{cases}$$

Чыгаруу. Системанын кеңейтилген матрицасына элементардык өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөлү. Экинчи, үчүнчү жана төртүнчү жолчолордон биринчи жолчону алып салабыз. Үчүнчү жолчого экинчисин, төртүнчүгө экиге көбөйтүлгөн экинчисин кошобуз:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right),$$

Демек, $rangA = 2,\ rang\overline{A} = 3,$ – система биргелешпеген, чечими жок.

Жообу: Системанын чечимдери жок.

Мисал 4.6. Кронеккер-Капелли теоремасын колдонуу менен анын биргелешкен экендигин тактап, СТСны чечкиле. Система аныкталбаган экендигин эске алып, анын жалпы, бизистик жана жекече чечимдерин тапкыла.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4; \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Чыгаруу: Гаусс алгоритмин колдонуу менен биз кеңейтилген матрицаны жөнөкөйлөтүлгөн формага келтиребиз. Ал үчүн үчүнчүдөн биринчи жолчону алып, экинчиден биринчини үч эсеге көбөйтүү керек. Андан кийин үчүнчү жолчону экинчисине кошуп, нөлдүк экинчи жолчону чийип чыгабыз, төмөндөгүнү алабыз:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Эми экинчи жолчону төрткө бөлүп, биринчиден алып салабыз:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

$rangA = rang\overline{A} = 2$ экендигин көрүү оңой. Ошондуктан, система биргелешкен. Биргелешкен системасынын рангы белгисиздердин санынан аз, анда система аныкталбаган жана чексиз көп сандагы чечимдерге ээ.

Базистик x_1 *жана* x_2 өзгөрмөлөрүн алабыз, бул белгисиздер үчүн коэффициенттеринин аныктагычы $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ нөлгө барабар эмес. Эркин өзгөрмөлөр x_3, x_4 *жана* x_5 болуп саналат. Системаны кайрадан төмөндөгүдөй көрүнүштө жазабыз:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + x_5 = \frac{5}{4}; \\ x_2 - \frac{7}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_4 = -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

x_1 *жана* x_2ни x_3, x_4 *жана* x_5 аркылуу туюнталы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5; \\ x_2 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4}x3 + \frac{7}{4}x_4. \end{cases}$$

$x_3 = u$, $x_4 = v$ *жана* $x_5 = t$ деп алалы, теңдемелер системасынын жалпы чечимин алабыз:

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}u - \frac{3}{4}v - t;$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}u + \frac{7}{4}v;$$

$$x_3 = u,\ x_4 = v,\ x_5 = t.$$

u, v жана t га ар кандай сандык маанилерди берип, бул теңдемелер системасынын ар кандай чечимдерин алабыз. Мисалы:

Базистик чечими: $\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}; 0; 0; 0,$ жекече чечими: $\frac{3}{4}; -\frac{13}{4}; 1; 1; 0.$

Жообу: жалпы чечими: $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}u - \frac{3}{4}v - t;$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}u + \frac{7}{4}v;$$

$$x_3 = u,\ x_4 = v,\ x_5 = t.$$

базистик чечими: $\frac{5}{4};\ -\frac{1}{4};\ 0;\ 0;\ 0,$

жекече чечими: $\frac{3}{4};\ -\frac{13}{4};\ 1;\ 1;\ 0.$

“Кронекер-Капеллинин теоремасы. Гаусстун методу” темалары боюнча өз алдынча чыгарууга тапшырмалар

Группа А

1.А. Матрицанын рангын эсептегиле:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Жообу: а) 3; *б)* 2; *в)* 2.

2.А-19.А мисалдарда Кронекер-Капеллинин теоремасынын жардамында, Гаусстун методу менен сызыктуу теңдемелер системасын чыгаргыла.

2.А. $\begin{cases} x+y+z=36; \\ x+z-y=13; \\ y+z-x=7. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,$
$x=14,5;\ y=11,5;\ z=10.$

6.А. $\begin{cases} 7x+2y+3z=15; \\ 5x+2z-3y=15; \\ 10x-11y+5z=36. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,$
$x=2;\ y=-1;\ z=1.$

3.А $\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x+3z-5y=1; \\ 7y-z+2x=8. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,$
$x=1;\ y=1;\ z=1.$

7.А. $\begin{cases} x-2y-z+5=0; \\ 2x+y-z+3=0; \\ 2y+3z-x=9. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,$
$x=-1;\ y=1;\ z=2.$

4.А. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28; \\ 7x-6z+3y=-1; \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,$

$x=2;\ y=3;\ z=4.$

8.А. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3; \\ 3x_1-3x_2+6x_3=9; \\ 4x_3-2x_2+2x_1=6. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=1<n=3,$

базистик чечим (3;0;0).

5.А. $\begin{cases} 2x+y=5; \\ x+3z=16; \\ 5y-z=10. \end{cases}$

9.А. $\begin{cases} x+y+z=0; \\ 2x+z+3y=1; \\ 2y+x=1. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,$ *Жообу*: $r(A)=r(B)=2<n=3,$

$x=1;\ y=3;\ z=5.$ базистик чечим (-1;1;0).

$$\textbf{10.A.}\begin{cases}3x_1+5x_2+4x_3+x_4=2;\\4x_1+9x_2+3x_3+6x_4=5;\\2x_1+7x_2-x_3+8x_4=5;\\x_1+4x_2-x_3+5x_4=3;\\6x_1+7x_2+11x_3-4x_4=1.\end{cases}$$

Жообу: $r(A)=r(B)=2<n=3,$ базистик чечим (-1;1;0;0).

$$\textbf{11.A.}\begin{cases}7x_1+5x_2-4x_3+6x_4=2;\\x_1-5x_2+3x_3+6x_4=5;\\2x_1+x_2-x_3+3x_4=5;\\x_1+4x_2-x_3+5x_4=9;\\6x_1+x_2+x_3-x_4=7.\end{cases}$$

Жообу: $r(A)=4,\ r(B)=5,$ система биргелешпеген.

$$\textbf{12.A.}\begin{cases}x-2y+z-t=0;\\2x+3y-z-4t=11;\\5x-4y-3z+2t=4;\\2y+3z-x-4=3t.\end{cases}\qquad \textbf{13.A}.\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+4x_4=6;\\4x_1+4x3+9x_4=17;\\3x_1+x_2+2x_3+5x_4=11;\\x_1+3x_2-2x_3-3x_4=-1.\end{cases}$$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=4,$ *Жообу*: $r(A)=r(B)=2<n=4,$

$x = 3;\ y = 2;\ z = 1,\ t = 0.$

базистик чечим $\frac{17}{4}; -\frac{7}{4}; 0; 0.$

14.A. $\begin{cases} -4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -2; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ 9x_1 + 8x_2 + x_3 = -7; \\ 5x_1 + 15x_2 + 6x_3 = -9; \\ -x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

Жообу: $r(A) = r(B) = n = 3,$

$x_1 = 0;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1.$

15.A. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1; \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_3 - 3x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2. \end{cases}$

Жообу: $r(A) = 4,\ r(B) = 5,$

система биргелешпеген.

16.A. $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_5 = 4; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 2. \end{cases}$

Жообу: $r(A) = r(B) = 3 < n = 5,$ базистик чечим (1;1;1;0;0).

17. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 0; \\ -2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + x_4 + 3x_5 = -2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 = -10. \end{cases}$

Жообу: $r(A) = r(B) = 3 < n = 5,$ базистик чечим (4;1;0;-1;0).

18.A. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 3; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=3<n=5,$ базистик чечим (1;0;0;0).

$$\textbf{19.A.}\ \begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1; \\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5=4; \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5=0. \end{cases}$$

Жообу: $r(A)=r(B)=3<n=5,$ базистик чечим $(\frac{5}{4};-\frac{1}{4};0;0;0)$.

"Кронекер-Капеллинин теоремасы. Гаусстун методу" темалары боюнча өз алдынча чыгарууга тапшырмалар

Группа В

1.В. Матрицанын рангын эсептегиле:

а) $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 10 & -1 \end{pmatrix}$

Жообу: а) 3; *б)* 4; *в)* 2.

2.В-17.А мисалдарда Кронекер-Капеллинин теоремасынын жардамында, Гаусстун методу менен сызыктуу теңдемелер системасын чыгаргыла.

2.В. $\begin{cases} x+2y=10; \\ 3x+2y+z=23; \\ y+2z=13. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,$
$x=4,5;\ y=3;\ z=5.$

3.В. $\begin{cases} 2x-3y+z=-7; \\ x+4y+2z=-1; \\ x-4y=-5. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,$
$x=-1;\ y=1;\ z=-2.$

4В. $\begin{cases} 3x+2y+z=3; \\ 5x-2y-2z=3; \\ x+y-z=-2. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,$
$x=1;\ y=-1;\ z=2.$

5.В. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+11x_4=8; \\ x_1+2x_2+4x_3+7x_4=4; \\ 5x_1+10x_3+5x_4=20. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=2<n=3,$
базистик чечим (4;0;0;0).

6В. $\begin{cases} x-4y+5z=5; \\ 2x-8y+3z=5; \\ -x+4y+2z=7. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=2,\ r(B)=3,$

биргелешпеген система

7.В. $\begin{cases} y+2z=0; \\ -x-2z=1; \\ y-x=1. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=2<n=3,$

базистик чечим (-1;0;0).

8.В. $\begin{cases} 10x_1-7x_2=7; \\ -3x_1+6x_2+2x_3=4; \\ 5x_3-x_2+5x_1=6. \end{cases}$

9.В. $\begin{cases} x_1-5x_2-6x_3+11x_4=-9; \\ 5x_1+x_2-4x_3+3x_4=7; \\ x_1+8x_2+7x_3-15x_4=17. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,\ \ x_1=0;\ x_2=-1;\ x_3=1.$
Жообу: $r(A)=2=r(B)=2<n=4,$ базистик чечим (1;2;0;0).

10.В. $\begin{cases} x_1-22x_2-3x_3-4x_4=-13; \\ x_1+3x_2+x_3+x_4=9; \\ 2x_1+5x_2+x_3+2x_4=16; \\ -5x_1+10x_2-x_3=11. \end{cases}$ **11.В**. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=3; \\ 2x_1+x_2+4x_3+3x_4=4; \\ x_1+2x_2+5x_3=5; \\ 5x_1+4x_2+13x_3+6x_4=13. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=3,\ \ r(B)=4,$ биргелешпеген система

Жообу: $r(A)=r(B)=3<n=4,$ базистик чечим (1;2;0;0)

12.В. $\begin{cases} x_1+x_2=2; \\ x_1-x_3=1; \\ 3x_2+3x_3+x_4=2; \\ x_1+3x_2+2x_3=-3. \end{cases}$ **13.В**. $\begin{cases} x_1+x_2=1; \\ x_1+x_2+x_3=4; \\ x_2+x_3+x_4+x_5=2; \\ 3x_1+3x_2+2x_3=9. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=3,\ \ r(B)=4,$ биргелешпеген система

Жообу: $r(A)=r(B)=3<n=5,$ базистик чечим (2;-1;3;0;0)

14.В. $\begin{cases} x_1-3x_3-4x_4=-13; \\ x_1+3x_2+x_3+x_4=9; \\ 2x_1+5x_2+x_3+2x_4=16; \\ -5x_1+10x_2+2x_3+3x_4=11. \end{cases}$ 1**5.В**. $\begin{cases} x+2y+z=2; \\ 5y+3z-7=x; \\ 8x+y+9=2z; \\ 2x+7y+4z=9. \end{cases}$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=4,$

$x_1=2;\ x_2=1;\ x_3=1;\ x_4=3.$

Жообу: $r(A)=r(B)=n=3,$

$x_1=0;\ x_2=-1;\ x_3=4.$

16.В. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3; \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4; \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$

Жообу: $r(A) = r(B) = n = 4$, $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = -1$.

17.В. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0; \\ 13x_1 - x_2 + x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_3 = 0; \\ 5x_2 - x_3 = 2; \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

Жообу: $r(A) = 3$, $r(B) = 4$, биргелешпеген система

Машыктыруучу тест

№	Шарттары	Жооптору
1	Аныктагычты эсепте: $$\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}$$	**А**. $b^2 - 1$ **Б**. $1 - b^2$ **В**. b^2 **Г**. $b^2 + 1$ **Д**. 0

2	Матрицанын элементтеринин суммасын тап: $$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 7\\ 5 & -2 & 0\\ 7 & 2 & 3\end{pmatrix},$$ $$B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 5 & -3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$	**А.** $\begin{pmatrix}7 & 5 & 11\\ 6 & 3 & -3\\ 6 & 2 & 5\end{pmatrix}$ **Б.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$ **В.** $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 5\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$ **Г.** $\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$ **Д.** 0
3	Эгерде $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ берилсе, $(A-B)\cdot C$ ны тапкыла	**А.** $\begin{pmatrix}12 & 0\\ -10 & 11\end{pmatrix}$ **Б.** $\begin{pmatrix}-10 & 0\\ 12 & 11\end{pmatrix}$ **В.** $\begin{pmatrix}12 & 0\\ 10 & 11\end{pmatrix}$ **Г.** $\begin{pmatrix}-10 & 0\\ 19 & 11\end{pmatrix}$ **Д.** $\begin{pmatrix}12 & 10\\ 10 & 11\end{pmatrix}$
4	Теңдемени чыгар:	**А.** 2 **Б.** 1

	$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & x \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$	**В**. 3 **Г**. –2 **Д**. –3
5	Тескери матрицанын элементтеринин суммасын тапкыла: $$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$	**А**. $\frac{5}{7}$ **Б**. $\frac{-6}{7}$ **В**. $\frac{3}{7}$ **Г**. $\frac{-4}{7}$ **Д**. $\frac{-2}{7}$
6	Тескери матрицанын жардамы менен системаны чыгар: $$\begin{cases} 5x+3y=7 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$$	**А**. (-1;2) **Б**. (1; - 2) **В**. (-1; - 2) **Г**. Чыгарылышы жок **Д**. (2; - 1)
7	Матрицанын рангын тапкыла: $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$	**А**. *rang*=2 **Б**. *rang*=3 **В**. *rang*=0 **Г**. *rang*=1 **Д.** *rang*=4
8	Крамердин методу менен СТСын чыгаргыла:	**А**. (3; -1; -2) **Б**. (-1; 0;1) **В**. (-1;4;2)

	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$	**Г**.(2;-1;-2) **Д**. (2; - 4; - 2)
9	Гаусстун методу менен СТСын чыгаргыла: $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y - 3z = 14 \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$	**А**. (2; -3; 2) **Б**. (-1; 3;-2) **В**. (1;3;2) **Г**.(-1;1;-2) **Д**. (2; 3; - 2)
10	Гаусстун методу менен СТСын чыгаргыла: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$	**А**. (1; - 1;- 2) **Б**. (-1; 1; 2) **В**. (1; -1; 2) **Г**. (-1; 1; - 2) **Д**. (1; 0; - 2)

Жооптору: 1Б, 2А, 3Г, 4Д, 5А, 6Д, 7А, 8Б, 9Д, 10В.

Машыктыруучу тесттердин варианттары:

Сызыктуу алгебра

1-вариант

№	Суроолору	Жоопторунун варианттары
1	Аныктагыч бул ...	а) сан; б) вектор; в) таблицалар.
2	... бирдик матрица	а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *б)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *г)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	... кубулбаган матрица	а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *б)* $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *г)* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
4	эгерде рангы $r(A)$ ... болсо, анда n белгисиздүү n теңдемелер биргелешкен системасы бир чечимге ээ болот.	а) $r(A) < n$; б) $r(A) = n$; в) $r(A) > n$.
5	Минордун алгебралык толуктоочтон айырмасы	а) айырмасы жок; б) мааниси конкреттүү; в) белгиси анык.

Сызыктуу алгебра

2-вариант

№	Суроолору	Жоопторунун варианттары
1	Аныктагыч $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$ …	а) $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$; б) $a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22}$; в) $a_{11} \cdot a_{22} + a_{21} \cdot a_{12}$
2	... - диагоналдык матрица	а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *б)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *г)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	Матрицага тескериси жашайт, эгерде ...	а) кубулган болсо; б) матрицанын аныктагычы нөл эмес болсо; в) матрицанын жолчолорунун саны мамычаларынын санына барабар болсо; г) кубулбаган болсо.
4	Бул теңдемелер системасын Крамердин эрежесин колдонуп чечүүгө мүмкүнбү? $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$	а) мүмкүн; б) мүмкүн эмес.
5	Эгерде аныктагычтын эки жолчосу алмашса, анда аныктагычтын мааниси ...	а) өзгөрбөйт б) нөлгө айланат в) белгиси карама-каршысына өзгөрөт г) туура жообу жок

Сызыктуу алгебра

3-вариант

№	Суроолору	Жоопторунун варианттары
1	Минордун a_{ij} элементи бул – ...	а) $(m-1)$ тартиптеги аныктагыч; б) $(n-1)$ тартиптеги матрица; в) n тартиптеги аныктагыч.
2	... тепкичтүү матрица	а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *б)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *г)* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасы берилди. А матрицасы үчүн тескери матрица:	а) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *б)* $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ *г)* $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$
4	n белгисиздүү m теңдемелердин системасын Крамердин эрежесин колдонуу менен чечүүгө болобу?	а) болот; б) болбойт.
5	Система биргелешкен жана бир чечимге ээ болот, эгерде ...	а) аныктагычы нөл эмес болсо; б) аныктагычы нөл болсо; в) аныктагычтын мааниси маанилүү эмес.

Сызыктуу алгебра

4-вариант

№	Суроолору	Жоопторунун варианттары
1	Алгебралык толуктоочтун a_{ij} элементи – бул ...	а) $(n-1)$ тартиптеги аныктагыч б) $(n-1)$ тартиптеги минор в) $M_{ij} = (-1)^{i+j}$
2	Матрицага жана анын формасына дал келтиргиле 1) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ а) диагоналдык б) бирдик	а) 1 – в; б) 2 – а; в) 3 – г; г) 4 – б.

	в) тик турчтуу г) үч бурчтук	
3	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1; \\ 3x_1 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ сызыктуу теңдемелер системасын Крамердин эрежесин колдонуу менен чечүүгө болот, анткени ...	а) $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ б) $\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ *б)* $\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ в) $\Delta x_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$
4	Эгерде $r(\tilde{A}) = r(A)$ жана $r < n$ болсо, n белгисиздүү m теңдемелер системасы ...	а) чечимге ээ болбойт; б) бир гана чечимге ээ; в) чексиз көп чечимдери бар.
5	Аныктагыч нөлгө барабар болот, эгерде ...	а) бардык жолчолору ар түрдүү болсо; б) жолчолору окшош болсо; в) аныктагычтын мааниси маанилүү эмес.

Сызыктуу алгебра

5-вариант

№	Суроолору	Жоопторунун варианттары
1	Матрица – бул ...	а) сан; б) таблица; в) аныктагыч.
2	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ x-3 & 2 & 4 \\ 7 & x-5 & 6 \end{pmatrix}$ матрицасынын аныктагычы 14кө барабар болсо, x ти тапкыла	а) 3; б) 4; в) 7; г) 1.
3	Аныктагычтын маанисин эсептегиле: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	а) оң; б) терс; в) нөл.
4	Эгерде $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ жана $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ болсо, анда	а) АВ жашабайт б) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ в) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ г) туура жообу жок
5	Квадраттык матрица кубулбаган болот, эгерде анын аныктагычы ...	а) нөлгө барабар болсо; б) нөлгө барабар эмес болсо; в) аныктагычтын мааниси маанилүү эмес.

Сызыктуу алгебра

6-вариант

№	Суроолору	Жоопторунун варианттары
1	Тескери матрица жашайт ...	а) бардык матрицалар үчүн б) бардык квадраттык матрицалар үчүн в) аныктагычы нөлгө барабар эмес болгон матрицалар үчүн
2	Эгерде $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}$ болсо, анда X матрицасын тапкыла	а) $X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ б) $X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ в) $X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ г) $X = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
3	Аныктагычтын маанисин эсептегиле: $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$	а) оң; б) терс; в) нөл.
4	Аныктагычтын белгиси өзгөрөт, эгерде ...	а) жолчосундагы жалпы көбөйтүүчүсүн аныктагычтын белгисинин алдына чыгарганда; б) транспонирлегенде; в) эки жолчосунун орду алмашканда.
5	$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ жана $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицалары үчүн кайсы амалды аткарууга болот	а) $A + B$; б) $B + A^T$; в) AB; г) BA.

Сызыктуу алгебра

7-вариант

№	Суроолору	Жоопторунун варианттары
1	Матрицанын рангы – бул ...	а) матрица тарабынан түзүлгөн аныктагычтардын санына барабар сан б) матрица тарабынан түзүлгөн нөлдөн башка аныктагычтардын санына барабар сан
2	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ матрицасына карата транспонирленген матрицаны тапкыла	а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ *б)* $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ *в)* $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ *г)* $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
3	Матрицанын аныктагычтан айырмасы	а) айырмасы жок; *б)* көрсөтүлгөн формасы боюнча; в) матрица- таблица, аныктагыч – сан.
4	Кандай матрицалар үчүн тескери матрица жашайт	а) тик бурчтуу б) квадраттык в) өздүк
5	Эгерде $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ болсо, анда $4A$ матрицасы кандай көрүнүшкө ээ?	а) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$

Сызыктуу алгебра

8-вариант

№	Суроолору	Жоопторунун варианттары
1	Аныктагычтын тартиби – бул ...	а) анын элементтеринин маанилеринин диапазону б) анын мааниси в) анын жолчолорунун жана мамычаларынын саны г) биринчи жолчонун биринчи элементинин индекстеринин суммасы
2	Өзгөчө эмес матрица деп айтабыз, анын ...болсо.	а) аныктагычы нөлгө барабар эмес; б) аныктагычы бирге барабар; в) жолчолорунун саны мамычаларынын санына барабар; г) жолчолорунун саны мамычаларынын санына барабар эмес.
3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ аныктагыч барабар ...	а) 16; б) 26; в) -16; г) 21.
4	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ аныктагычынын транспонирленген аныктагычы ...	а) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
5	Диагоналдык матрица деп аталат, эгерде ...	а) негизги диагоналдан тышкары бардык элементтери нөлгө барабар болсо; б) негизги диагоналдагы бардык элементтери нөлгө барабар болсо;

		в) негизги жана кошумча диагоналдардагы бардык элементтери нөлгө барабар болсо; г) биринчи жолчонун бардык элементтери нөлгө барабар болсо.

Сызыктуу алгебра

9-вариант

№	Суроолору	Жоопторунун варианттары
1	Скалярдык матрица деп аталат, эгерде ... болсо.	а) бардык элементтери айырмалуу б) бардык элементтери нөлгө барабар в) негизги диагоналдагы элементтери бирдей санга барабар, нөлдөн айырмалуу, ал эми калган элементтери нөл г) бардык диагоналдык элементтери бирге барабар
2	Учунчу тартиптеги аныктагыч деген эмне?	а) матрицанын негизги диагоналындагы элементтер вектордун координаталары болгон б) матрицанын кошумча диагоналындагы элементтер вектордун координаталары болгон в) белгилүү бир жол менен матрицага дал келген кандайдыр бир сан

		г) теңдемелер системасын чечүү коэффициенттеринен түзүлгөн матрицадан түзүлөт.
3	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ аныктагыч барабар ...	а) 20; б) 0; в) -25; г) 52
4	Матрицанын аныктагычын эсептегиле: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	а) -6; б) 6; в) -4; г) 4
5	Диагоналдык матрица – бул ...	а) негизги диагоналдан тышкары бардык элементтери нөлгө барабар болгон матрица б) негизги диагоналдагы бардык элементтери нөлгө барабар болгон матрица в) негизги жана кошумча диагоналдардагы бардык элементтери нөлгө барабар болгон матрица г) биринчи жолчонун бардык элементтери нөлгө барабар болгон матрица

Сызыктуу алгебра

10-вариант

№	Суроолору	Жоопторунун варианттары
1	Транспонирленген квадраттык матрицанын аныктагычы ... барабар	а) берилген матрицанын аныктагычына; б) 0; в) 1; г) -1
2	Эгерде $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ жана $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ болсо, анда АВ эмнеге барабар?	а) $\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 15 & -14 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 15 & -14 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$
3	Тескери матрица ... үчүн жашайт	а) бардык матрицалар; б) бардык квадраттык матрицалар; в) нөлдүк матрицалар г) бардык квадраттык кубулбаган матрицалар
4	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ аныктагыч эмнеге барабар?	а) 95; б) 83; в) 87; г) 91.
5	Эгерде матрица бирдей жолчолорду кармасаса, анда анын аныктагычы канчага барабар?	а) 1 б) 0 в) белгисиз санга

Колдонулган адабияттар

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах Ч. 1. / – М.: Мир и образование, Астрель, Оникс, 2012. – 368 с.
2. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики / М.: Лань, 2009. – 736 с.
3. Гурский Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: В 1 ч. / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.п. Сильванович Под ред. Е.И. Гурского. – Мн.: Высш. шк., 1990. – 350 с.
4. Журбенко Л.Н. Математика в примерах и задачах Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева, О.М. Дегтярева. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 373 с.
5. Лунгу К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч.1 / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 213 с.
6. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике, 1 курс 7-е изд. / – М.: Айрис-пресс, 2008. – 578 с. – (Высшее образование).
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 303 с. – (Высшее образование).
8. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики / – М: Наука, 1985 г.
9. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов Ф.С. Краткий курс высшей матенматики. / – М: Высшая школа, 1978 г., т.1.
10. Беклемишов Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / – М.: Наука, 1980, 1984 и т.д.
11. В.А. Малугин. Математика для экономистов: Линейная алгебра.
Курс лекции / – М.: Эксмо, 2006, – 224 с.
12. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения / Учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008, – 192 с.
13. А.Б. Соболев, А.Ф. Рыбалко. Математика / Учебное пособие. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. – 180 с.

Курбанбаева Нуржамал Нажимидиновна

Математика дисциплинасы боюнча өз алдынча тапшырмалардын топтому

Студенттер жана колдонуучулар үчүн окуу-усулдук колдонмо

Басмага берилди: 22.10.2022
Көлөмү: шарттуу 6,4 б.т. Буйрутма № 51/22
Форматы 60x90 1/16. Нускасы 500 даана
“Book дизайн” компьютердик кызматтары
Ош шаары, И.Сулайманов