

И.Д. ДЖУРАЕВ, А.С. ПУШЕВ, И.А. КУЛИКОВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
ПАРАБОЛО-
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
ТИПА

АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
Институт механики и сейсмостойкости сооружений
им. М. Т. Уразбаева

Т. Д. ДЖУРАЕВ, А. СОПУЕВ, М. МАМАЖАНОВ

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
ТИПА**

Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР
А. В. Бицадзе

Ташкент
Издательство „Фан“ Узбекской ССР
1986

Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986, 220 с.

В монографии обсуждаются вопросы корректной постановки и исследования краевых задач для широкого класса парабола-гиперболических уравнений, которые находят все более широкое приложение к различным задачам механики, физики и техники. Впервые изучаются краевые задачи в трехмерном пространстве. Предлагаются новые постановки задач для уравнений третьего и четвертого порядков, учитывающие определенную зависимость между порядком уравнения и числом условий склеивания, а также новые методы исследования указанных уравнений.

Для математиков и механиков, интересующихся дифференциальными уравнениями и их приложениями.

Рецензенты
члены-корреспонденты АН УзССР
Ш. А. Алимов, Б. А. Бондаренко

Тухтамурад Джураевич Джураев,
Адахимжан Сопуев,
Мирза Мамажанов

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

*Утверждено к печати
Ученым Советом института механики и сейсмостойкости сооружений
им. М. Т. Уразбаева АН УзССР
и Бюро отделения механики и процессов управления
АН УзССР*

Редактор *Н. Н. Боева*
Художник *И. А. Цыганов*
Технический редактор *Х. У. Бабамухамедова*
Корректор *Н. А. Подтуркина*

ИБ № 3508

Сдано в набор 10.03.86. Подписано к печати 15.04.86. P03481. Формат 60×84^{1/16}. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 12,79. Уч.-изд. л. 12,0. Тираж 1275. Заказ 55. Цена 2 р. 20 к.

Издательство «Фан» УзССР, Ташкент, 700047, ул. Гоголя, 70.
Типография Издательства «Фан» УзССР, Ташкент, проспект М. Горького, 79.

ВВЕДЕНИЕ

Теория уравнений смешанного типа — один из основных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными — получила интенсивное развитие за последние 30—40 лет. В частности это можно объяснить выявлением множества прикладных задач, математическое моделирование которых обуславливает изучение различных типов уравнений в рассматриваемой области изменения независимых переменных.

Первоначально изучались преимущественно уравнения эллиптико-гиперболического типа. Это и понятно, так как первые фундаментальные исследования для сопряжения уравнений эллиптического и гиперболического типов выполнены Ф. Трикоми в двадцатых годах нашего столетия [96].

Не останавливаясь на истории возникновения и развития отдельных направлений уравнений смешанного типа, отметим, что и настоящее время в нашей стране и за рубежом опубликованы многочисленные работы, посвященные теоретическим и прикладным аспектам уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. Основная библиография по этим вопросам приведена в трудах А. В. Бицадзе [8, 13], Л. Берса [5], М. М. Смирнова [92], а также М. С. Салахитдинова [77] и Т. Д. Джураева [28].

В настоящее время понятие уравнений смешанного типа значительно расширилось и включает всевозможные комбинации двух или трех классических типов уравнений. Интенсивное исследование уравнений смешанного эллиптико-параболического и параболично-гиперболического типов обусловлено тем, что, с одной стороны, новые типы смешанных уравнений еще мало исследованы в теоретическом плане, с другой, они находят широкое применение в важных вопросах механики, физики и техники.

Настоящая книга посвящена постановке и изучению большого круга корректных краевых задач для уравнений параболично-гиперболического типа второго, третьего и четвертого порядков как на плоскости, так и в трехмерном пространстве.

Остановимся подробно на обзоре результатов, полученных для уравнений смешанного параболично-гиперболического типа, и ука-

жем возможности их приложения. На необходимость рассмотрения задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой — гиперболическое, было указано в 1959 г. И. М. Гельфандом [25]. Он приводит пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой: в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его — уравнением диффузии.

Одной из первых работ, посвященных изучению краевых задач для параболо-гиперболических уравнений, явилась работа Г. М. Стручиной [93]. Я. С. Уфлянд [98] задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке $0 < x < l$ полубесконечной линии пренебрегается потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки, свел к решению системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} L \frac{\partial I_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x} &= 0, \quad C_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial I_1}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < l, \\ RI_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x} &= 0, \quad C_2 \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial I_2}{\partial x} = 0, \quad l < x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при начальных

$$U_1|_{t=0} = 0, \quad I_1|_{t=0} = 0, \quad U_2|_{t=0} = 0$$

и граничных

$$U_1|_{x=0} = E(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U_2 = 0$$

условиях, а также при требованиях непрерывности напряжения и тока

$$U_1|_{x=l} = U_2|_{x=l}, \quad I_1|_{x=l} = I_2|_{x=l}.$$

Здесь L , C_1 — самоиндукция и емкость (на единицу длины) первого участка линии; R , C_2 — сопротивление и емкость второго участка (см. также [56]).

Нетрудно убедиться, что если из системы уравнений (1) исключить токи, то в привычных для нас обозначениях можно прийти к задаче

$$0 = \begin{cases} a_1^2 u_{xx} - u_{yy}, & 0 < x < l, \\ a_2^2 u_{xx} - u_y, & l < x < +\infty, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad u(x, 0) = 0, \quad l < x < \infty,$$

$$u(0, y) = E(y), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0,$$

$$u(l-0, y) = u(l+0, y), \quad u_x(l+0, y) = \frac{R}{L} \int_0^y u_x(l-0, \eta) d\eta, \quad (3)$$

$$a_1^2 = \frac{1}{LC_1}, \quad a_2^2 = \frac{1}{RC_2}.$$

Эта задача для более общего уравнения, чем уравнения (2) с общими условиями склеивания вида (3) рассмотрена в § 5 главы 1 настоящей книги.

Некоторые задачи на сопряжения уравнений параболического и гиперболического типов изучены в работах С. И. Гайдука и А. В. Иванова [24], С. И. Гайдука [23].

О. А. Ладыженская и Л. Ступялис [53] в многомерном пространстве рассмотрели начально краевые задачи на сопряжения эллиптических, гиперболических и параболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

Л. А. Золина [47] исследовала аналог задачи Трикоми для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0 \end{cases} \quad (4)$$

в области D^* , ограниченной снизу характеристиками уравнения (4) $AC: x+y=0$ и $BC: x-y=1$, с боков непрерывными кривыми AA_0 и BB_0 , сверху отрезком A_0B_0 прямой, параллельной оси x с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u|_{AA_0} &= \varphi_1(y), \quad u|_{BB_0} = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ u|_{AC} &= \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2 \end{aligned}$$

и условиями склеивания

$$\begin{aligned} u(x, +0) &= \lambda(x) u(x, -0), \\ u_y(x, +0) &= \mu(x) u_y(x, -0). \end{aligned}$$

Л. А. Золина привела также некоторые физические интерпретации сопряжения уравнений параболического и гиперболического типов, изучила обобщения задачи Трикоми (в частности, задачу M) для уравнения (4) (см. [28, 48]). После этих статей появился целый ряд работ, где рассматриваются задача Трикоми и ее обобщения, задачи со смещениями, задача типа задачи Бицадзе-Самарского и некоторые другие нелокальные задачи для смешанных параболо-гиперболических уравнений второго порядка. Это

работы М. А. Абдрахманова [1], Х. Г. Бжихатлова и А. М. Нахушева [7], Н. А. Бориско [18], Л. Ступялиса [94], Х. Г. Бжихатлова [6], В. А. Елеева [43—46], А. М. Нахушева [65], В. Н. Врагова [21, 22], Т. Д. Джураева и А. Сопуева [35, 36], А. Сопуева [87—91], А. М. Нагорного [61], А. Ф. Напсо [62], Т. Д. Джураева и У. Эгамбердиева [40], У. Эгамбердиева [101], М. С. Салахитдинова и А. Бердышева [78, 79], М. С. Салахитдинова и А. К. Уринова [84] и др. Отметим также работу Ж. А. Акилова [2], где совместно-раздельные течения вязкоупругой и вязкой жидкостей сводятся к изучению краевой задачи, аналогичной задаче (2), (3).

Основные результаты, полученные авторами за последние годы для параболо-гиперболических уравнений второго порядка на плоскости, приведены в главе I предлагаемой монографии.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа изучались в пространстве трех и большего числа измерений. А. В. Бицадзе [10] для уравнения

$$zu_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = g(x, y, z)$$

в трехмерной цилиндрической области с границей $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, где $S_1: x^2 + \frac{4}{9}z^3 = 1, z \geq 0$; $S_2: x - \frac{2}{3}(-z)^{3/2} = -1, z \leq 0$;

$$S_3: x + \frac{2}{3}(-z)^{3/2} = 1, z \leq 0,$$

исследовал краевую задачу с условиями

$$u|_{S_1} = 0, u|_{S_2} = 0.$$

А. М. Нахушев [63], А. М. Ежов и С. П. Пулькин [42], А. М. Ежов [41], С. М. Пономарев [70] и др. рассмотрели краевые задачи для уравнений смешанного эллипτικο-гиперболического типа в бесконечных цилиндрических областях.

Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения в трехмерной призматической области впервые исследованы авторами книги и приведены в главе 2.

Одним из важных классов уравнений с частными производными являются так называемые уравнения составного и смешанно-составного типов. Корректные краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа впервые исследованы А. В. Бицадзе [9], А. В. Бицадзе и М. С. Салахитдиновым [14], Т. Д. Джураевым [27]. Обзор работ, посвященных изучению уравнений составного и смешанно-составного типа, главные части которых содержат операторы эллиптического и эллипτικο-гиперболического типов, сделан М. С. Салахитдиновым [77] и Т. Д. Джураевым [28]. Отметим также книгу А. Джураева [26], где исследуются системы уравнений составного типа.

В той части настоящей книги, где речь идет об уравнениях смешанного типа третьего и четвертого порядков, мы главным образом, изучаем уравнения, содержащие в своей главной части параболо-гиперболические операторы. Изучению таких уравнений предшествовали исследования, посвященные уравнениям третьего и более высокого порядков с оператором теплопроводности в главной части. Хотя все характеристики рассматриваемых уравнений являются действительными, такие уравнения названы составными (см. [111]).

Названные уравнения встречаются в различных задачах механики. Например, распространение плоской волны в вязкоупругом твердом теле или в сжимаемой вязкой жидкости с незначительной удельной теплопроводностью описывается уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

которое изучено R. Nardini [109, 110] и M. Hanin [108].

Систематическое изучение уравнений третьего порядка, содержащих в главной части смешанные операторы параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов, началось в начале семидесятых годов и интенсивно развивается в работах Т. Д. Джуряева и его учеников [28, 39, 33, 74, 100, 29, 37, 30, 31, 57, 90, 32, 4, 58, 38, 105, 85] (см. также [80, 81, 75, 76]).

Следует обратить внимание на вводные замечания главы 3 настоящей работы, где обсуждаются вопросы правильного использования общего решения уравнения в смешанной области и условий склеивания на линии изменения типа, которые играют определяющую роль при постановке корректных краевых задач для уравнений смешанно-составного типа.

Отметим, что до сих пор при изучении уравнений смешанно-составного типа исследователи главным образом ограничивались рассмотрением модельных уравнений. Это объясняется тем, что аналитический метод исследования этих уравнений и соответствующих краевых задач почти всегда основывался на использовании представления общего решения уравнения смешанно-составного типа в виде суммы функций. Например, если уравнение смешанно-составного типа является уравнением третьего порядка, то одна из этих функций удовлетворяет уравнению первого порядка, другая — уравнению второго порядка. Такое представление имеет место, вообще говоря, для уравнений, составляемых из произведения перестановочных дифференциальных операторов, поэтому не рассматривались уравнения, для которых нет требуемого представления общего решения. Нами для изучения уравнений

смешанного типа третьего и четвертого порядков (см. гл. 4 и 5) применен метод, не требующий специального представления общего решения рассматриваемых уравнений. Этот метод обуславливает изучение уравнений второго порядка классических типов с неизвестными правыми частями, что представляет самостоятельный интерес для решения важных обратных задач механики и физики.

Авторы выражают глубокую благодарность члену-корреспонденту АН СССР А. В. Бицадзе за постоянный интерес к их исследованиям, а также профессорам В. А. Ильину и А. А. Дезину за ценные советы и замечания.

ГЛАВА I. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА НА ПЛОСКОСТИ

Настоящая глава посвящена постановке и исследованию корректных в классическом смысле краевых задач в различных областях плоскости для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Эти задачи являются аналогами известных задач Трикоми, Геллерстедта, Бицадзе и др., поставленных для эллипτικο-гиперболических уравнений.

§1. Задача Трикоми

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} L_1[u] \equiv u_{xx} + a_1(x, y)u_x + b_1(x, y)u_y + c_1(x, y)u & \text{в } D_1, \\ L_2[u] \equiv u_{xx} - u_{yy} + a_2(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c_2(x, y)u & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

где D_1 — область, ограниченная отрезками AB , BB_0 , B_0A_0 и A_0A прямых $y=0$, $x=1$, $y=h$ и $x=0$, т. е. прямоугольник $\{0 < x < 1, 0 < y \leq h\}$, а D_2 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком $A(0, 0)B(1, 0)$ оси x и двумя характеристиками $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ уравнения (1.1), выходящими из точек A и B и пересекающимися в точке $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Совокупность областей D_1 и D_2 вместе с открытым отрезком AB обозначим через D .

Задача Т (Трикоми). Найти непрерывную в замкнутой области $\bar{D}$ функцию $u(x, y)$ с непрерывными внутри D производными u_x и u_y , являющуюся регулярным решением уравнения (1.1) в областях D_i ($i=1, 2$) и принимающую заданные значения

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= \varphi_1(y), \quad u|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ u|_{AC} &= \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

здесь $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — непрерывные функции, $\psi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $\varphi_1(0) = \psi(0)$.

Относительно коэффициентов уравнения (1.1) сделаем следующие предположения:

1) в $\bar{D}_1$ коэффициенты $a_1(x, y)$, $b_1(x, y)$, $c_1(x, y)$ непрерывны и удовлетворяют по x условию Гёльдера, причем $b_1(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера еще и по y ; кроме того,

$$\forall (x, y) \in \bar{D}_1: b_1(x, y) \leq -b_0 < 0, c_1(x, y) < 0; \quad (1.3)$$

2) коэффициенты $a_2, b_2 \in C^2(\bar{D}_2)$, $c_2 \in C^1(\bar{D}_2)$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a_2(x, y) + b_2(x, y) &\geq 0, \\ a_2^2 - b_2^2 + 2x_{2x} + 2x_{2y} + 2b_{2x} + 2b_{2y} - 4c_2 &\geq 0, \\ c_2(x, y) &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Примем обозначения

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \nu(x). \quad (1.5)$$

Имеет место следующий принцип экстремума.

Принцип максимума. Пусть:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$;
- 2) $u(x, y)$ обладает непрерывными вторыми производными, входящими в операторы L_1 и L_2 ;
- 3) $u(x, y)$ удовлетворяет неравенству $L_1(u) \geq 0$ в D_1 и $L_2(u) \leq 0$ в D_2 ;
- 4) выполняются условия (1.3) и (1.4);
- 5) $u(x, y)$ является монотонно неубывающей функцией от y на характеристике AC . Тогда функция $u(x, y)$ свой положительный максимум в $\bar{D}$ принимает на отрезках AA_0 и BB_0 .

Действительно, как показано в работе [106], при выполнении условия 5) принципа максимума, условий (1.4) и неравенства $L_2[u] \leq 0$ в D_2 функция $u(x, y)$ свой положительный максимум принимает во внутренней точке $(x_0, 0)$ отрезка AB , причем в точке положительного максимума

$$\nu(x_0) \geq 0. \quad (1.6)$$

С другой стороны, при выполнении условий (1.3) и неравенства $L_1[u] \geq 0$ в D_1 функция $u(x, y)$ непрерывный в $\bar{D}_1$ свой положительный максимум принимает на AB , AA_0 , BB_0 (см., например, [51]). Покажем, что для функции $u(x, y)$ любая точка $(x_0, 0)$ отрезка AB не может быть точкой положительного максимума. В самом деле в силу непрерывности производных u_x, u_y и u_{xx} из неравенства $L_1[u] \geq 0$ мы можем перейти к пределу при $y \rightarrow +0$ и получим

$$\tau''(x) + a_1(x, 0)\tau'(x) + c_1(x, 0)\tau(x) + b_1(x, 0)v(x) \geq 0. \quad (1.7)$$

Из (1.7) в силу условий (1.3) в точке положительного максимума имеем $v(x_0) < 0$, что противоречит неравенству (1.6), что и требовалось доказать.

Теперь с помощью принципа максимума найдем априорную оценку решения задачи T . Для этого введем функцию

$$v(x, y) = \pm u(x, y) + M \exp[N(x + 2y)], \quad (1.8)$$

где $u(x, y)$ — решение задачи T , а M и N — некоторые положительные константы, определяющиеся в дальнейшем. Покажем, что при подходящем выборе констант M и N функция $v(x, y)$ удовлетворяет всем условиям принципа максимума. В самом деле

$$L_1[u] = M[N^2 + (a_1 + 2b_1)N + c_1] \geq 0$$

и

$$L_2[u] = M[-3N^2 + (a_2 + 2b_2)N + c_2] \leq 0,$$

если

$$N \geq \max_{\bar{D}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{(a_1 + 2b_1)^2 - 4c_1} - a_1 - 2b_1 \right], \right. \\ \left. \frac{1}{6} \left[\sqrt{(a_2 + 2b_2)^2 + 12c_2} + a_2 + 2b_2 \right] \right\}.$$

Для того, чтобы $v(x, y)$ на AC была монотонно неубывающей функцией от y , достаточно положить

$$M = \frac{1}{N} \exp\left(\frac{N}{2}\right) \max_{AC} |u_y(-y, y) - u_x(-y, y)| = \\ = \frac{1}{N} \exp\left(\frac{N}{2}\right) \max |\psi'(x)|. \quad (1.9)$$

Итак, функция $v(x, y)$ удовлетворяет всем условиям принципа максимума, поэтому справедлива оценка

$$v(x, y) \leq \max_{AA_0} |v(x, y)| + \max_{BB_0} |v(x, y)|.$$

Отсюда, переходя к функции $u(x, y)$ по формуле (1.8) и учитывая (1.9), окончательно получим априорную оценку

$$|u(x, y)| \leq \max |\varphi_1(y)| + \max |\varphi_2(y)| + \frac{2}{N} \exp(Nh_1) \max |\psi'(x)|, \quad (1.10)$$

где $h_1 = 2h + 3/2$.

Из оценки (1.10) легко следует единственность решения задачи

T . Нетрудно убедиться, что из оценки (1.10) также следует непрерывная зависимость решения задачи T от граничных данных, т. е. решение задачи T устойчиво.

Теперь докажем существование решения задачи T . Как известно, решение задачи Коши для уравнения (1.1) в области D_2 имеет вид (см. [95, 12])

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{2} [R(x, y; x+y, 0)\tau(x+y) + R(x, y; x-y, 0)\tau(x-y)] - \\ & - \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} [R_{\tau}(x, y; \xi, 0) + b_2(\xi, 0)R(x, y; \xi, 0)] \tau(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} R(x, y; \xi, 0) \nu(\xi) d\xi; \end{aligned} \quad (1.11)$$

здесь $R(x, y; \xi, \eta)$ — функция Римана, определяемая как решение задачи Гурса;

$$R_{\xi\xi} - R_{\eta\eta} - (a_2 R)_{\xi} - (b_2 R)_{\eta} + c_2 R = 0,$$

$$\begin{aligned} R(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=x+y-\xi} = & \exp\left(\frac{1}{2} \int_x^{\xi} [a_2(t, x+y-t) + \right. \\ & \left. + b_2(t, x+y-t)] dt\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=\xi-x+y} = & \exp\left(\frac{1}{2} \int_x^{\xi} [a_2(t, t-x+y) - \right. \\ & \left. - b_2(t, t-x+y)] dt\right), \end{aligned}$$

$$R(x, y; x, y) = 1.$$

Воспользуясь последним условием (1.2), из (1.11) имеем

$$\begin{aligned} \tau(x) - \int_0^x P(x, \xi) \tau(\xi) d\xi = & 2\psi(x/2) - \\ - R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; 0, 0\right) \psi(0) + & \int_0^x R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; \xi, 0\right) \nu(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$P(x, \xi) = - \left[R_{\eta} \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; \xi, 0 \right) + \right. \\ \left. + b_2(\xi, 0) R \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; \xi, 0 \right) \right] / R \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; x, 0 \right).$$

После обращения полученного интегрального уравнения относительно $\tau(x)$, будем иметь первое функциональное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из области D_2 :

$$\tau(x) = \int_0^x T(x, t) v(t) dt + g(x), \quad (1.12)$$

где

$$T(x, t) = R \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; t, 0 \right) + \\ + \int_t^x \Gamma(x, \xi) R \left(\frac{\xi}{2}, -\frac{\xi}{2}; t, 0 \right) d\xi, \\ g(x) = 2\psi \left(\frac{x}{2} \right) - R \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; 0, 0 \right) \psi(0) + \\ + \int_0^x \Gamma(x, \xi) \left[2\psi \left(\frac{\xi}{2} \right) - R \left(\frac{\xi}{2}, -\frac{\xi}{2}; 0, 0 \right) \psi(0) \right] d\xi,$$

а $\Gamma(x, \xi)$ — резольвента ядра $P(x, \xi)$.

Отметим, что с помощью решения задачи Коши-Гурса для уравнения (1.1) в области D_2 аналогичное соотношение получено в работе [72].

Согласно условиям задачи T мы можем в уравнении (1.1) перейти к пределу при $y \rightarrow +0$ и получить

$$\tau''(x) + a_1(x, 0) \tau'(x) + c_1(x, 0) \tau(x) = -b_1(x, 0) v(x). \quad (1.13)$$

Поэтому второе функциональное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из области D_1 , определим как решение уравнения (1.13), удовлетворяющее крайним условиям

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(1) = \varphi_2(0). \quad (1.14)$$

Оно имеет вид

$$\tau(x) = f(x) - \int_0^1 G(x, t) b_1(t, 0) v(t) dt; \quad (1.15)$$

здесь

$$f(x) = \varphi_1(0) + x[\varphi_2(0) - \varphi_1(0)] - \int_0^1 G(x, t) \{ [a_1(t, 0) + \\ + tc_1(t, 0)] [\varphi_2(0) - \varphi_1(0)] + \varphi_1(0)c_1(t, 0) \} dt,$$

а $G(x, t)$ — функция Грина краевой задачи (1.13), (1.14), обладающая свойствами [86]:

а) в промежутках $0 \leq x < t, t < x \leq 1$ непрерывна вместе с производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению, сопряженному с уравнением (1.13), кроме того, при каждом фиксированном $t, 0 < t < 1$ удовлетворяет как функция от x однородным краевым условиям (1.14);

б) в точке $t=x$ как функция t сама непрерывна, а ее первая производная по x имеет скачок, причем

$$G_x(x, x+0) - G_x(x, x-0) = 1.$$

Исключая $\tau(x)$ из (1.12) и (1.15), получаем интегральное уравнение

$$\int_0^x T(x, t) \nu(t) dt + g(x) = f(x) - \int_0^1 G(x, t) b_1(t, 0) \nu(t) dt,$$

из которого после дифференцирования по x имеем

$$\nu(x) - \int_0^x T_1(x, t) \nu(t) dt = f'(x) - g'(x) - \int_0^1 G_x(x, t) b_1(t, 0) \nu(t) dt, \quad (1.16)$$

где

$$T_1(x, t) = - \frac{T_x(x, t)}{R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; x, 0\right)}.$$

Обращая уравнение (1.16), получим

$$\nu(x) + \int_0^1 K(x, t) \nu(t) dt = g_1(x), \quad (1.17)$$

здесь

$$K(x, t) = b_1(t, 0) \left[G_x(x, t) + \int_0^x \Gamma_1(x, \xi) G_x(\xi, t) d\xi \right],$$

$$g_1(x) = f'(x) - g'(x) + \int_0^x \Gamma_1(x, \xi) [f'(\xi) - g'(\xi)] d\xi,$$

а $\Gamma_1(x, \xi)$ — резольвента ядра $T_1(x, \xi)$.

В силу свойств функций $G(x, t)$ и $R(x, y; \xi, \eta)$ заключаем, что функция $K(x, t)$ в промежутке $0 \leq x < t, t < x \leq 1$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x , а $g_1(x)$ непрерывно дифференцируема в $0 < x < 1$.

Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма второго рода (1.17) следует из единственности решения задачи T .

После нахождения функции $v(x)$ из (1.17) решение задачи T в D_2 определяется по формуле (1.11), а в D_1 — как решение первой краевой задачи для уравнения (1.1) с условиями

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad u|_{y=0} = \tau(x)$$

(см., например [51]).

З а м е ч а н и е 1.1. Мы установили корректность задачи T для параболо-гиперболического уравнения, т. е. для него доказали существование, единственность и устойчивость решения. В дальнейшем останавливаться на вопросе об устойчивости решения рассматриваемых задач, когда это не вызывает сомнений, не будем. Устойчивость решений следует либо из принципа максимума и априорных оценок, либо из способа конструктивного построения решения.

Задачу T можно исследовать в более общей постановке.

З а д а ч а T_α . Требуется определить функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{D}_i) \cap C^1(D_i \cup I)$, $i = 1, 2$;
- 2) $u(x, y)$ в области D_i ($i = 1, 2$) является регулярным решением уравнения (1.1);
- 3) на отрезке AB выполняются условия склеивания

$$\begin{aligned} u(x, -0) &= \alpha(x) u(x, +0) + \gamma(x), \\ u_y(x, -0) &= \beta(x) u_y(x, +0) + \delta(x), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — заданные функции, причем $\alpha, \gamma \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$,

$$\beta, \delta \in C(\bar{I}) \cap C^1(I), \quad \alpha(x)\beta(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{I};$$

- 4) $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (1.2), причем $\psi(0) = \alpha(0)\varphi_1(0) + \gamma(0)$.

Докажем, что при выполнении условий (1.4) и

$$\forall (x, y) \in D_1: b_1(x, y) \leq -b_0 < 0,$$

$$\begin{aligned} c_1(x, y) - \frac{\alpha''}{\alpha} + 2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - a_1(x, y) \frac{\alpha'}{\alpha} < 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\alpha\beta > 0$$

решение задачи T_α единственно.

Рассмотрим задачу T_a с однородными граничными условиями

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{AC} = 0 \quad (1.20)$$

и условиями склеивания

$$\begin{aligned} u(x, -0) &= \alpha(x) u(x, +0), \\ u_y(x, -0) &= \beta(x) u_y(x, +0). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Положим

$$v(x, y) = \begin{cases} \alpha(x) u(x, y) = v^+(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u(x, y) = v^-(x, y), & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что функция $v(x, y)$ является в области D решением уравнения

$$0 = \begin{cases} v_{xx} + \left(a_1 - \frac{2\alpha'}{\alpha}\right) v_x + b_1 v_y + \left[c_1 - \frac{\alpha''}{\alpha} + \right. \\ \quad \left. + 2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - a_1 \frac{\alpha'}{\alpha}\right] v & \text{в } D_1, \\ v_{xx} - v_{yy} + a_2 v_x + b_2 v_y + c_2 v & \text{в } D_2 \end{cases} \quad (1.22)$$

и удовлетворяет условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0, \quad v|_{AC} = 0, \quad (1.23)$$

$$v(x, -0) = v(x, +0), \quad v_y(x, -0) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} v_y(x, +0).$$

Отсюда, так как $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} > 0$, то согласно указанному принципу экстремума имеем $v(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$, следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$.

Перейдем к доказательству существования решения задачи T_a . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= u(x, +0), \quad \tau_2(x) = u(x, -0), \\ \nu_1(x) &= u_y(x, +0), \quad \nu_2(x) = u_y(x, -0). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Соотношение на AB между функциями $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесенное из области D_2 , как было показано при решении задачи T , выражается формулой (1.12), а соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из области D_1 , — формулой (1.15). Исключая из полученных соотношений (1.12), (1.15) и из условий склеивания (1.18) функции $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$ и $\nu_1(x)$ и дифференцируя полученное уравнение, приходим к интегральному уравнению

$$v_2(x) - \int_0^x T_1(x, t) v_2(t) dt = \\ = g_1(x) + \int_0^1 \frac{b_1(t, 0)}{\beta(t)} \cdot \frac{d}{dx} [\alpha(x) G(x, t)] v_2(t) dt,$$

которое может быть сведено к уравнению Фредгольма второго рода

$$v_2(x) + \int_0^1 K(x, t) v_2(t) dt = q(x), \quad (1.25)$$

где

$$K(x, t) = \frac{b_1(t, 0)}{\beta(t) R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; x, 0\right)} \cdot \frac{d}{dx} [\alpha(x) G(x, t)] - \\ - \int_0^x \frac{b_1(t, 0) \Gamma_1(x, \xi)}{\beta(t) R\left(\frac{\xi}{2}, -\frac{\xi}{2}; \xi, 0\right)} \cdot \frac{d}{d\xi} [\alpha(\xi) G(\xi, t)] d\xi, \\ q(x) = g_1(x) + \int_0^x \Gamma_1(x, \xi) g_1(\xi) d\xi,$$

$$g_1(x) = \frac{1}{R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; x, 0\right)} \left\{ \alpha'(x) f(x) + \alpha(x) f'(x) - g'(x) + \right. \\ \left. + \int_0^1 \frac{b_1(t, 0) \delta(t)}{\beta(t)} \cdot \frac{d}{dx} [\alpha(x) G(x, t)] dt \right\},$$

а $\Gamma_1(x, \xi)$ — резольвента ядра $T_1(x, t) = -\frac{T_x(x, t)}{R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; x, 0\right)}.$

Доказательство однозначной разрешимости уравнения (1.25) и дальнейшие рассуждения по решению задачи T_a проводятся точно так же, как и в задаче T .

Замечание 1.2. При исследовании задачи T (T_a) на коэффициенты уравнения (1.1) в области D_2 накладывались условия (1.4), которые при $|a_2| = |b_2| \equiv \text{const}$ (или при $a_2 = b_2 = 0$) не имеют место, если $c_2 \neq 0$. Поэтому эти случаи должны быть рассмотрены отдельно. Но задачи T и T_a для этих случаев вытекают из более общей задачи, рассмотренной в следующем параграфе.

§2. Задача Голлерстедта

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y & \text{в } D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} + c_k u & \text{в } D_k (k = 2, 3), \end{cases} \quad (2.1)$$

где D_1 — область, определенная в § 1; D_2 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком $A(0, 0)E(\epsilon, 0)$ оси x и двумя характеристиками $AC_1: x + y = 0$, $EC_1: x - y = \epsilon$ уравнения (2.1), выходящими из точек A и E и пересекающимися в точке $C_1\left(\frac{\epsilon}{2}, -\frac{\epsilon}{2}\right)$; D_3 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком $E(\epsilon, 0)B(1, 0)$ оси x и двумя характеристиками $EC_2: x + y = \epsilon$, $BC_2: x - y = 1$ уравнения (2.1), выходящими из точек E и B и пересекающимися в точке $C_2\left(\frac{\epsilon+1}{2}, \frac{\epsilon-1}{2}\right)$, причем $\epsilon \in [0, 1]$, а $c_k = \text{const} \geq 0$ ($k = 2, 3$). Открытые отрезки AE и EB обозначим соответственно через i_1 и i_2 . Совокупность областей D_1 , D_2 и D_3 вместе с отрезком AB обозначим через D .

Задача Γ_1 . Найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D}_k) \cap [C^1(D_1 \cup i_1 \cup i_2) \cup C^1(D_2 \cup i_1) \cup C^1 \times \times (D_3 \cup i_1)]$, $k = 1, 2, 3$;

2) является регулярным решением уравнения (2.1) всюду в области D , кроме точек отрезка AB и характеристик EC_1 , EC_2 ;

3) удовлетворяет условиям склеивания

$$\left. \begin{aligned} u(x, -0) &= \alpha_k(x) u(x, +0) + \gamma_k(x), \quad x \in \bar{i}_k, \\ u_y(x, -0) &= \beta_k(x) u_y(x, +0) + \delta_k(x) u(x, +0) + \zeta_k(x), \\ x &\in i_k, \quad k = 1, 2; \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

4) удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2.3)$$

$$u|_{EC_1} = \psi_1(x), \quad \frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \epsilon,$$

$$u|_{EC_2} = \psi_2(x), \quad \epsilon \leq x \leq \frac{\epsilon+1}{2}, \quad (2.4)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k, \zeta_k$ — заданные функции, причем $\alpha_k \beta_k \neq 0$; $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1', \psi_2', \alpha_k'', \beta_k'', \gamma_k'', \delta_k'', \zeta_k''$ непрерывны.

Задача Γ_2 . Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи Γ_1 , кроме второго условия (2.4), вместо которого должно выполняться условие

$$u|_{BC_2} = \psi_2(x), \quad \frac{\varepsilon+1}{2} \leq x \leq 1. \quad (2.5)$$

Замечание 2.1. Рассмотрение задачи Γ_1 и Γ_2 с условиями склеивания (2.2) для модельного уравнения (2.1) охватывает рассмотрение этих задач для более общих уравнений с постоянными коэффициентами с непрерывными или разрывными условиями склеивания.

В самом деле, если заданы уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + a_1 u_x + c_1 u & \text{в } D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_k u_x + b_k u_y + c_k u & \text{в } D_k (k=2, 3), \end{cases} \quad (2.6)$$

где $a_1, c_1, a_k, b_k, c_k (k=2, 3)$ — действительные числа, то введя в областях $D_k (k=1, 2, 3)$ новую неизвестную функцию $v(x, y)$ по формуле

$$u(x, y) = v(x, y) \exp(\alpha_k x + \beta_k y), \quad k=1, 2, 3$$

и выбирая константы α_k, β_k должным образом, для функции $v(x, y)$ получаем уравнение (2.1). При этом независимо от того, непрерывные или разрывные первоначальные условия склеивания для уравнения (2.6), для функции $v(x, y)$ они преобразуются к виду (2.2). Поэтому нами с самого начала взяты уравнения (2.1).

Ближайшей нашей задачей является нахождение соотношения между функциями $\tau_k(x)$ и $\nu_k(x) (k=1, 2)$ в соответствии с обозначениями (1.24).

Как известно, решение задачи Коши для уравнения (2.1) в области $D_k (k=2, 3)$ дается формулой [95]

$$u(x, y) = \frac{\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_k}[(x-\xi)^2 - y^2]) \nu_2(\xi) d\xi - \\ - \frac{\sqrt{c_k}}{2} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_0'(\sqrt{c_k}[(x-\xi)^2 - y^2])}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \tau_2(\xi) d\xi, \quad (2.7)$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Удовлетворяя (2.7) первому условию из (2.4), имеем

$$\begin{aligned} \tau_2(2x - \varepsilon) - \sqrt{c_1}(x - \varepsilon) \int_{\varepsilon}^{2x - \varepsilon} \frac{J_0'(\sqrt{c_1(\xi - \varepsilon)(\xi + \varepsilon - 2x)})}{\sqrt{(\xi - \varepsilon)(\xi - 2x + \varepsilon)}} \tau_2(\xi) d\xi + \\ + \int_{\varepsilon}^{2x - \varepsilon} J_0(\sqrt{c_1(\xi - \varepsilon)(\xi - 2x + \varepsilon)}) v_2(\xi) d\xi = \\ = 2\psi_1(x) - \psi_1(\varepsilon), \quad \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Осуществляя в интегралах замену $\xi - \varepsilon = \rho$, полагая $2(x - \varepsilon) = z$ и меняя ρ на ξ , а z на x , получаем

$$\begin{aligned} \tau_2(x + \varepsilon) + \int_0^x \frac{x}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} J_0(\sqrt{c_1 \xi(\xi - x)}) \tau_2(\xi + \varepsilon) d\xi = \\ = 2\psi_1\left(\frac{x + 2\varepsilon}{2}\right) - \psi_1(\varepsilon) - \int_0^x J_0(\sqrt{c_1 \xi(\xi - x)}) v_2(\xi + \varepsilon) d\xi. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой обращения для таких уравнений [20], находим

$$\begin{aligned} \tau_2(x + \varepsilon) = 2\psi_1\left(\frac{x + 2\varepsilon}{2}\right) - \psi_1(\varepsilon) - \int_0^x J_0(\sqrt{c_1 \xi(\xi - x)}) v_2(\xi + \varepsilon) d\xi - \\ - \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} J_0(\sqrt{c_1 x(x - \xi)}) \left[2\psi_1\left(\frac{\xi + 2\varepsilon}{2}\right) - \psi_1(\varepsilon) \right] d\xi + \\ + \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} J_0(\sqrt{c_1 x(x - \xi)}) d\xi \int_0^{\xi} J_0(\sqrt{c_1 t(t - \xi)}) v_2(t + \varepsilon) dt. \end{aligned}$$

Применяя формулу Дирихле к последнему слагаемому и пользуясь тождеством [82]

$$\begin{aligned} \int_t^x J_0(\sqrt{c_1 t(t - \xi)}) \frac{\partial}{\partial \xi} J_0(\sqrt{c_1 x(x - \xi)}) d\xi = \\ = J_0(\sqrt{c_1 t(t - x)}) - J_0[\sqrt{c_1}(x - t)], \end{aligned}$$

после некоторого преобразования имеем искомое соотношение на отрезке l_1 :

$$\tau_2(x) = p(x) + \int_x^\varepsilon J_0[\sqrt{c_1}(x-t)] v_2(t) dt, \quad x \in l_1, \quad (2.8)$$

где

$$p(x) = 2\psi_1\left(\frac{x+\varepsilon}{2}\right) - \psi_1(\varepsilon) + \\ + \int_x^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} J_0(\sqrt{c_1}(x-\varepsilon)(x-t)) \left[2\psi_1\left(\frac{t+\varepsilon}{2}\right) - \psi_1(\varepsilon) \right] dt.$$

Аналогичным образом, удовлетворяя (2.7) второму условию из (2.4), получаем соотношение на отрезке l_2 :

$$\tau_2(x) = q(x) + \int_x^\varepsilon J_0[\sqrt{c_2}(x-t)] v_2(t) dt, \quad x \in l_2, \quad (2.9)$$

где

$$q(x) = 2\psi_2\left(\frac{x+\varepsilon}{2}\right) - \psi_2(\varepsilon) - \\ - \int_x^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} J_0(\sqrt{c_2}(x-\varepsilon)(x-t)) \left[2\psi_2\left(\frac{t+\varepsilon}{2}\right) - \psi_2(\varepsilon) \right] dt.$$

Теперь нетрудно доказать единственность решения задачи Γ_1 . Для этого рассмотрим однородную задачу Γ_1 и определим знак следующего интеграла (см. также [33]):

$$I_1 = \int_0^\varepsilon \tau_2(x) v_2(x) dx = \int_0^\varepsilon v_2(x) dx \int_x^\varepsilon J_0[\sqrt{c_1}(x-t)] v_2(t) dt = \\ = \int_0^\varepsilon v_2(x) dx \int_x^\varepsilon \left[\frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-z^2)^{-1/2} \cos \sqrt{c_1} z(x-t) dz \right] v_2(t) dt = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-z^2)^{-1/2} dz \int_0^\varepsilon v_2(x) dx \int_x^\varepsilon \cos \sqrt{c_1} z(x-t) v_2(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-z^2)^{-1/2} \left[\left(\int_0^\varepsilon v_2(t) \cos \sqrt{c_1} z t dt \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\int_0^\varepsilon v_2(t) \sin \sqrt{c_1} z t dt \right)^2 \right] dz \geq 0.$$

Точно также имеем

$$I_2 = \int_\varepsilon^1 \tau_2(x) v_2(x) dx = \int_\varepsilon^1 v_2(x) dx \int_\varepsilon^x J_0[\sqrt{c_2}(x-t)] v_2(t) dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-z^2)^{-1/2} \left[\left(\int_\varepsilon^1 v_2(t) \cos \sqrt{c_2} z t dt \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\int_\varepsilon^1 v_2(t) \sin \sqrt{c_2} z t dt \right)^2 \right] dz \geq 0.$$

Итак,

$$I_k \geq 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.10)$$

В соответствии с условиями задачи Γ_1 при $y \rightarrow +0$ из уравнения (2.1) получаем соотношение

$$\tau_1''(x) - v_1(x) = 0, \quad x \in I_k, \quad k = 1, 2. \quad (2.11)$$

Полагая $k = 1$ из условий склеивания (2.2) находим

$$\begin{aligned} \tau_2(x) &= \alpha_1(x) \tau_1(x), \\ v_2(x) &= \beta_1(x) v_1(x) + \delta_1(x) \tau_1(x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тогда из соотношений (2.11) и (2.12) с учетом условий

$$\tau_1(0) = \tau_1(\varepsilon) = \tau_1(1) = 0$$

имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\varepsilon \tau_2(x) v_2(x) dx = \int_0^\varepsilon \alpha_1(x) \beta_1(x) \tau_1(x) v_1(x) dx + \\ &+ \int_0^\varepsilon \alpha_1(x) \delta_1(x) \tau_1^2(x) dx = \int_0^\varepsilon \alpha_1(x) \beta_1(x) \tau_1(x) \tau_1''(x) dx + \\ &+ \int_0^\varepsilon \alpha_1(x) \delta_1(x) \tau_1^2(x) dx = \int_0^\varepsilon \left\{ \alpha_1(x) \delta_1(x) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} [\alpha_1(x) \beta_1(x)] \} \tau_1^2(x) dx - \int_0^{\varepsilon} \alpha_1(x) \beta_1(x) \tau_1'^2(x) dx.$$

При $k = 2$, поступая точно также, находим

$$I_2 = \int_{\varepsilon}^1 \tau_2(x) v_2(x) dx = \int_{\varepsilon}^1 \left\{ \alpha_2(x) \delta_2(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} [\alpha_2(x) \beta_2(x)] \right\} \tau_1^2(x) dx - \int_{\varepsilon}^1 \alpha_2(x) \beta_2(x) \tau_1'^2(x) dx.$$

Пусть

$$\alpha_k(x) \beta_k(x) > 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\alpha_k(x) \delta_k(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} [\alpha_k(x) \beta_k(x)] \leq 0. \quad (2.13)$$

Тогда из выражений для интегралов I_1 и I_2 следует, что

$$I_k \leq 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.14)$$

Сравнивая (2.10) и (2.14), имеем $I_k \equiv 0$, $k = 1, 2$. Итак, при выполнении условий (2.13) получаем, что $\tau_1(x) \equiv 0$, $\forall x \in [0, 1]$, которое влечет за собой $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$. Таким образом, решение задачи Γ_1 единственно, если выполнены условия (2.13).

Теперь докажем существование решения задачи Γ_1 . Для этого решим уравнение (2.11) на отрезках i_1 и i_2 со следующими краевыми условиями соответственно:

$$\tau_1(0) = \varphi_1(0), \quad \tau_1(\varepsilon) = x = \frac{\psi_1(\varepsilon) - \gamma_1(\varepsilon)}{\alpha_1(\varepsilon)} = \frac{\psi_2(\varepsilon) - \gamma_2(\varepsilon)}{\alpha_2(\varepsilon)};$$

$$\tau_1(\varepsilon) = x, \quad \tau_1(1) = \varphi_2(0).$$

Имеем

$$\tau_1(x) = f_1(x) + \int_0^{\varepsilon} G_1(x, t) v_1(t) dt, \quad x \in i_1, \quad (2.15)$$

$$\tau_1(x) = f_2(x) + \int_{\varepsilon}^1 G_2(x, t) v_1(t) dt, \quad x \in i_2. \quad (2.16)$$

где

$$G_1(x, t) = \begin{cases} \frac{(t-\varepsilon)x}{\varepsilon}, & 0 \leq x \leq t, \\ \frac{(x-\varepsilon)t}{\varepsilon}, & t \leq x \leq \varepsilon, \end{cases}$$

$$G_2(x, t) = \begin{cases} \frac{(t-1)(x-\varepsilon)}{1-\varepsilon}, & \varepsilon \leq x \leq t, \\ \frac{(x-1)(t-\varepsilon)}{1-\varepsilon}, & t \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f_1(x) = \varphi_1(0) + \frac{x}{\varepsilon} [\varkappa - \varphi_1(0)],$$

$$f_2(x) = \varkappa + \frac{x-\varepsilon}{1-\varepsilon} [\varphi_2(0) - \varkappa].$$

Принимая во внимание условия склеивания (2.2), из (2.8) и (2.15) исключаем функции $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$ и $\nu_1(x)$. Тогда приходим к интегральному уравнению относительно $\nu_2(x)$:

$$\int_x^\varepsilon J_0 [\sqrt{c_1}(x-t)] \nu_2(t) dt = \int_0^\varepsilon M_1(x, t) \nu_2(t) dt + P_1(x), \quad (2.17)$$

где

$$M_1(x, t) = \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} G_1(x, t) - \int_0^t \frac{\alpha_1(x) \delta_1(\xi)}{\alpha_1(\xi) \beta_1(\xi)} G_1(x, \xi) J_0[\sqrt{c_1}(\xi-t)] d\xi,$$

$$P_1(x) = \alpha_1(x) f_1(x) + \gamma_1(x) - p(x) + \\ + \int_0^\varepsilon \frac{\alpha_1(x) G_1(x, t)}{\alpha_1(t) \beta_1(t)} [\delta_1(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \zeta_1(t) - \delta_1(t) p(t)] dt.$$

Применяя формулу обращения [97]

$$\varphi(x) = -\Phi'(x) + \lambda^2 \int_x^1 \Phi(t) \frac{J_1[\lambda(x-t)]}{\lambda(x-t)} dt$$

интегрального уравнения

$$\int_x^1 \varphi(t) J_0[\lambda(x-t)] dt = \Phi(x),$$

уравнение (2.17) перепишем в виде

$$\nu_2(x) - \int_0^\varepsilon M(x, t) \nu_2(t) dt = P(x), \quad x \in I_1, \quad (2.18)$$

здесь

$$M(x, t) = \sqrt{c_1} \int_x^\varepsilon M_1(\xi, t) \frac{J_0[\sqrt{c_1}(x-\xi)]}{x-\xi} d\xi - M_{1x}(x, t),$$

$$P(x) = V\overline{c_1} \int_x^a \frac{J_0[V\overline{c_1}(x-t)]}{x-t} P_1(t) dt - P_1'(x).$$

Таким же образом из (2.9), (2.16) и (2.2) имеем

$$v_2(x) - \int_{\epsilon}^1 H(x, t) v_2(t) dt = Q(x), \quad x \in I_2, \quad (2.19)$$

где

$$H(x, t) = H_{1x}(x, t) + V\overline{c_1} \int_{\epsilon}^x \frac{J_1[V\overline{c_1}(x-\xi)]}{x-\xi} H_1(\xi, t) dt,$$

$$H_1(x, t) = \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(t)} G_2(x, t) - \int_t^1 \frac{\alpha_2(x) \delta_2(\xi)}{\alpha_2(\xi) \beta_2(\xi)} G_2(x, \xi) J_0[V\overline{c_2}(\xi-t)] d\xi,$$

$$Q(x) = Q_1'(x) + V\overline{c_1} \int_{\epsilon}^x \frac{J_1[V\overline{c_1}(x-\xi)]}{x-\xi} Q_1(\xi) d\xi,$$

$$Q_1(x) = \alpha_2(x) f_2(x) + \gamma_2(x) - q(x) + \\ + \int_{\epsilon}^1 \frac{\alpha_2(x) G_2(x, t)}{\alpha_2(t) \beta_2(t)} [\delta_2(t) \gamma_2(t) - \alpha_2(t) \zeta_2(t) - \delta_2(t) q(t)] dt.$$

Из единственности решения задачи Γ_1 и из свойств функций M , H , P и Q следует разрешимость интегральных уравнений Фредгольма (2.18) и (2.19) в классе непрерывно дифференцируемых функций на отрезках I_1 и I_2 соответственно. После определения функций $v_2(x)$, $\tau_2(x)$ и $\tau_1(x)$ из (2.18), (2.19) и (2.2) решение задачи Γ_1 в области D_1 находится как решение первой краевой задачи для уравнения (2.1), а в областях D_2 и D_3 — по формуле (2.7).

Аналогично доказывается единственность и существование решения задачи Γ_2 .

Замечание 2.2. Если в постановке задачи Γ_1 точка $E(\epsilon, 0)$ совпадает с точкой $A(0, 0)$ или $B(1, 0)$, то задача Γ_1 совпадает с задачей T § 1.

§ 3. Задача Бицадзе

В области D , определенной в § 1 для модельного уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y & \text{в } D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

рассмотрим аналог задачи T_1 , поставленной и исследованной А. В. Бицадзе для уравнения Лаврентьева-Бицадзе [8].

Обозначим через $E_k(\varepsilon_k, 0)$ ($k = 1, \dots, n$), $0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_n < 1$ заданные точки отрезка AB , а

$$A_k\left(\frac{\varepsilon_k}{2}, -\frac{\varepsilon_k}{2}\right), B_k\left(\frac{\varepsilon_k+1}{2}, \frac{\varepsilon_k-1}{2}\right),$$

$k = 0, 1, \dots, n+1$ ($\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_{n+1} = 1$) — точки пересечения характеристик уравнения (3.1), выходящих из точки E_k с характеристиками AC и BC соответственно;

$$I_k = \{(x, y): \varepsilon_k < x < \varepsilon_{k+1}, y = 0\}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Задача T_1 . Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

1) она непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, а производные первого порядка непрерывно склеиваются по всем точкам отрезка AB , кроме, быть может, точек $A, E_1, \dots, E_n, B$, в которых u_x и u_y могут иметь разрывы первого рода;

2) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (3.1) в области D всюду, кроме точек отрезка AB и характеристик $E_k A_k, E_k B_k$;

3) принимает заданные значения

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3.2)$$

$$u|_{A_k A_{k+1}} = \psi_k(x) \text{ при четных } k, \quad (3.3)$$

$$u|_{B_k B_{k+1}} = \psi_k(x) \text{ при нечетных } k,$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) — заданные функции; если n — нечетное число, то дополнительно потребуем выполнения условия

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_y(x, 0) = \varphi'_1(0). \quad (3.4)$$

Пусть n — четное число. Прежде всего с помощью принципа Асгейрсона легко определить, что

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_{2k}, 0) = \tau(\varepsilon_{2k}) &= \psi_{2k}\left(\frac{\varepsilon_{2k}}{2}\right) + \psi_{2k-1}\left(\frac{\varepsilon_{2k}+1}{2}\right) - \\ &- \psi_n\left(\frac{1}{2}\right) = a_{2k}, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2}, \\ u(\varepsilon_{2k+1}, 0) = \tau(\varepsilon_{2k+1}) &= \psi_{2k}\left(\frac{\varepsilon_{2k+1}}{2}\right) + \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$+ \psi_{2k+1} \left(\frac{\varepsilon_{2k+1} + 1}{2} \right) - \psi_n \left(\frac{1}{2} \right) = a_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{n-2}{2}.$$

Как известно [8], в силу (3.3) и обозначений (1.5) функциональные соотношения, принесенные из области D_2 , имеют вид

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'_{2k} \left(\frac{x}{2} \right), \quad (3.6)$$

$$x \in I_{2k}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2};$$

$$\tau'(x) + \nu(x) = \psi'_{2k-1} \left(\frac{x+1}{2} \right), \quad (3.7)$$

$$x \in I_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2};$$

а из области D_1 [28] —

$$\tau''(x) - \nu(x) = 0, \quad x \in I_{2k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

Исключая из системы уравнений (3.6), (3.8) и (3.7), (3.8) функции $\nu(x)$, приходим к задачам

$$\tau''(x) - \tau'(x) = -\psi'_{2k} \left(\frac{x}{2} \right), \quad (3.9)$$

$$\tau(\varepsilon_{2k}) = a_{2k}, \quad \tau(\varepsilon_{2k+1}) = a_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2};$$

$$\tau''(x) + \tau'(x) = \psi'_{2k-1} \left(\frac{x+1}{2} \right), \quad (3.10)$$

$$\tau(\varepsilon_{2k-1}) = a_{2k-1}, \quad \tau(\varepsilon_{2k}) = a_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2},$$

где

$$\tau(0) = \varphi_1(0) = \psi_0(0), \quad \tau(1) = \varphi_2(0),$$

решения которых выписываются в явном виде:

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \frac{a_{2k}(e^x - e^{\varepsilon_{2k+1}}) + a_{2k+1}(e^{\varepsilon_{2k}} - e^x)}{e^{\varepsilon_{2k}} - e^{\varepsilon_{2k+1}}} - \\ & - \int_{\varepsilon_{2k}}^{\varepsilon_{2k+1}} \frac{(e^{\varepsilon_{2k}} - e^x)(1 - e^{\varepsilon_{2k+1}-t})}{e^{\varepsilon_{2k}} - e^{\varepsilon_{2k+1}}} \psi'_{2k} \left(\frac{t}{2} \right) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\varepsilon_{2k}}^x (1 - e^{x-t}) \psi'_{2k} \left(\frac{t}{2} \right) dt, \quad \varepsilon_{2k} \leq x \leq \varepsilon_{2k+1}, \\
\tau(x) = & \frac{a_{2k-1} (e^{-x} - e^{-\varepsilon_{2k}}) + a_{2k} (e^{-\varepsilon_{2k-1}} - e^{-x})}{e^{-\varepsilon_{2k-1}} - e^{-\varepsilon_{2k}}} - \\
& - \int_{\varepsilon_{2k-1}}^{\varepsilon_{2k}} \frac{(e^{-\varepsilon_{2k-1}} - e^{-x})(1 - e^{-(\varepsilon_{2k}-t)})}{e^{-\varepsilon_{2k-1}} - e^{-\varepsilon_{2k}}} \psi'_{2k-1} \left(\frac{t+1}{2} \right) dt + \\
& + \int_{\varepsilon_{2k-1}}^x (1 - e^{-(x-t)}) \psi'_{2k-1} \left(\frac{t+1}{2} \right) dt, \quad \varepsilon_{2k-1} \leq x \leq \varepsilon_{2k}.
\end{aligned}$$

Единственность решения задачи T_1 при четном n следует из того, что в случае однородной задачи T_1 задачи (3.9) и (3.10) имеют только тривиальные решения, и из единственности решений первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, задачи Коши и Гурса для уравнения колебания струны.

После нахождения функции $\tau(x)$ решение задачи T_1 в области D_1 определяется как решение задачи (3.1), (3.2) и $u(x, 0) = \tau(x)$. Построение решения задачи T_1 в области D_2 трудности не представляет.

Предположим теперь, что n — нечетное число. В этом случае значения функции в точках E_i , $i = \overline{1, n}$ нельзя установить, так как значение $u(C)$ неизвестно, но можно определить с помощью условия (3.4). Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\tau''(x) - v(x) &= 0, \\
\tau'(x) - v(x) &= \psi'_0 \left(\frac{x}{2} \right), \quad x \in I_0,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

принесенные соответственно из областей D_1 и D_2 . Отсюда, исключая $v(x)$, приходим к задаче

$$\begin{aligned}
\tau''(x) - \tau'(x) &= -\psi'_0 \left(\frac{x}{2} \right), \\
\tau(0) &= a_0, \quad \tau(\varepsilon_1) = a_1,
\end{aligned}$$

где a_1 — неизвестная константа, подлежащая определению. После нахождения решения последней задачи, из второго уравнения системы (3.11) следует

$$v(x) = \frac{(a_0 - a_1)e^x}{1 - e^{\varepsilon_1}} - \psi'_0 \left(\frac{x}{2} \right) + \int_0^{\varepsilon_1} \frac{e^x (1 - e^{\varepsilon_1-t})}{1 - e^{\varepsilon_1}} \psi'_0 \left(\frac{t}{2} \right) dt -$$

$$- \int_0^x e^{x-t} \psi'_0 \left(\frac{t}{2} \right) dt.$$

Здесь, пользуясь условием (3.4), находим

$$a_1 = \tau(\varepsilon_1) = a_0 - [\varphi'_1(0) + \psi'_0(0)](1 - e^{\varepsilon_1}) + \\ + \int_0^{\varepsilon_1} (1 - e^{\varepsilon_1-t}) \psi'_0 \left(\frac{t}{2} \right) dt.$$

Затем из принципа Асгейрссона определяется значение $u(C)$, тем самым и значения $u(E_i)$, $i = 2, \dots, n$. Далее задача решается так же, как и в случае четного n .

Отметим, что вместо условия (3.4) может быть задано какое-нибудь другое условие.

Задача T_{1a} . Требуется определить функцию $u(x, y)$, обладающую свойствами:

- 1) $u(x, y)$ удовлетворяет условиям 2) и 3) задачи T_1 ;
- 2) $u(x, y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$, а производные первого порядка непрерывны в области $D^i \cup \left(\bigcup_{k=0}^n J_k \right)$, $i = 1, 2$, причем в точках $A, E_1, \dots, E_n, B$ и x и y могут иметь разрывы первого рода;

3) выполняются условия склеивания

$$\tau_2(x) = \alpha_k(x) \tau_1(x) + \gamma_k(x), \quad x \in \overline{J}_k, \\ v_2(x) = \beta_k(x) v_1(x) + \delta_k(x) \tau_1(x) + \\ + \zeta_k(x), \quad x \in J_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$
(3.12)

(см. обозначения (1.24)), где $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $\gamma_k(x)$, $\delta_k(x)$, $\zeta_k(x)$ — заданные функции, причем $\alpha'_k(x)$, $\beta'_k(x)$, $\gamma'_k(x)$, $\delta'_k(x)$, $\zeta'_k(x)$ непрерывны и $\alpha_k(x) \beta_k(x) \neq 0$, $\forall x \in J_k$; если n — нечетное число, то и здесь потребуем выполнения условия (3.4).

Пусть n — четное число. Как и в задаче T_1 , имеют место функциональные соотношения (3.6)–(3.8), принесенные из областей D_1 и D_2 . Исключая из этих соотношений функции $\tau_2(x)$, $v_1(x)$ и $v_2(x)$, с учетом условий склеивания (3.12) приходим к задачам:

$$\tau_1''(x) - \frac{\alpha_{2k}(x)}{\beta_{2k}(x)} \tau_1'(x) + \frac{\delta_{2k}(x) - \alpha'_{2k}(x)}{\beta_{2k}(x)} \tau_1(x) =$$

$$= \frac{\gamma'_{2k}(x) - \zeta_{2k}(x) - \psi'_{2k}\left(\frac{x}{2}\right)}{\beta_{2k}(x)}, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \tau_1(\varepsilon_{2k}) &= a_{2k}^*, \quad \tau_1(\varepsilon_{2k+1}) = a_{2k+1}^*; \\ \tau_1''(x) + \frac{\alpha_{2k-1}(x)}{\beta_{2k-1}(x)} \tau_1'(x) + \frac{\delta_{2k-1}(x) + \alpha'_{2k-1}(x)}{\beta_{2k-1}(x)} \tau_1(x) &= \\ &= \frac{\psi'_{2k-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) - \gamma'_{2k-1}(x) - \zeta_{2k-1}(x)}{\beta_{2k-1}(x)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\tau_1(\varepsilon_{2k-1}) = a_{2k-1}^*, \quad \tau_1(\varepsilon_{2k}) = a_{2k}^*,$$

где

$$a_{2k}^* = \frac{\alpha_{2k} - \gamma_{2k}(\varepsilon_{2k})}{\alpha_{2k}(\varepsilon_{2k})}, \quad a_{2k-1}^* = \frac{\alpha_{2k-1} - \gamma_{2k-1}(\varepsilon_{2k-1})}{\alpha_{2k-1}(\varepsilon_{2k-1})},$$

а $a_{2k}(k=1, \dots, \frac{n}{2})$, $a_{2k-1}(k=1, \dots, \frac{n}{2})$ определены по формуле (3.5).

Задачи (3.13) и (3.14) допускают единственные решения, если

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_{2k}(x) - \alpha'_{2k}(x)}{\beta_{2k}(x)} &\leq 0, \quad x \in \bar{J}_{2k}, \\ \frac{\delta_{2k-1}(x) + \alpha'_{2k-1}(x)}{\beta_{2k-1}(x)} &\leq 0, \quad x \in \bar{J}_{2k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Следовательно, решения этих задач могут быть выписаны через функции Грина [86].

Дальнейшее исследование задачи $T_{1\alpha}$ при четном и нечетном n проводится аналогично задаче T_1 .

§4. Задача Коши для парабола-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения τ и ρ

Пусть

$$D_1 = \{(x, y): 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\},$$

$$D_2 = \{(x, y): -\infty < x < 0, 0 < y < +\infty\},$$

$$J = \{(x, y): x = 0, 0 < y < +\infty\},$$

а $D = D_1 \cup J \cup D_2$. Для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y & \text{в } D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} + cu & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $c = \text{const} \geq 0$ — произвольное действительное число, в области D будем изучать задачу Коши. Отметим, что линия $x = 0$ является нехарактеристической линией изменения типа уравнения (4.1). По поводу рассматриваемой задачи Коши для уравнения (4.1) также имеет место замечание 2.1.

Задача К. Определить функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) она непрерывна в $\bar{D}_i$ ($i=1,2$);
- 2) частные производные u_x и u_y непрерывны в $D_i \cup J$ ($i=1,2$);
- 3) является регулярным решением уравнения (4.1) в областях D_i ($i=1,2$);
- 4) на J выполняются условия склеивания

$$\begin{aligned} \tau_1(y) &= \alpha(y) \tau_2(y) + \gamma(y), \\ \nu_1(y) &= \beta(y) \nu_2(y) + \delta(y) \tau_2(y) + \zeta(y), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta$ — заданные функции; $\alpha(y), \gamma(y) \in C^2$, $\beta(y), \delta(y), \zeta(y) \in C^1$, причем $\forall y \in J, \alpha(y) \beta(y) \neq 0$, а

$$\begin{aligned} \tau_1(y) &= u(+0, y), \quad \tau_2(y) = u(-0, y), \\ \nu_1(y) &= u_x(+0, y), \quad \nu_2(y) = u_x(-0, y); \end{aligned}$$

5) принимает заданные значения

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (4.3)$$

$$u(x, 0) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x \leq 0, \quad (4.4)$$

$$u_y(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x \leq 0, \quad (4.5)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ — заданные функции; $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2$, $\psi \in C^1$, причем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(0) &= \beta(0) \varphi_2(0) + \gamma(0), \\ \varphi_1'(0) &= \beta(0) \varphi_2'(0) + \delta(0) \varphi_2(0) + \zeta(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Прежде чем перейти к решению задачи К, рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$u_{xx} - u_{yy} + cu = 0, \quad (4.7)$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad u_y(x, 0) = \Psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4.8)$$

$$u(-0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y < +\infty, \quad (4.9)$$

где $\Phi(x) \equiv \varphi_2(x)$, $\Psi(x) \equiv \psi(x)$, $-\infty < x \leq 0$.

Решение задачи (4.7)–(4.9) ищем в виде

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

где $u_k(x, y)$ ($k = 1, 2$) — решения уравнения (4.7), удовлетворяющие соответственно условиям

$$u_1(x, 0) = \Phi(x), \quad u_{1y}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4.10)$$

$$u_1(-0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y < +\infty, \quad (4.11)$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_{2y}(x, 0) = \Psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4.12)$$

$$u_2(-0, y) = 0. \quad (4.13)$$

Нетрудно убедиться, что решение уравнения (4.7), удовлетворяющее условиям (4.10), имеет вид [19]

$$u_1(x, y) = \frac{\Phi(x-y) + \Phi(x+y)}{2} + \\ + \frac{\sqrt{c}}{2} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{I_1(\sqrt{c} \sqrt{y^2 - (x-\xi)^2})}{\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}} \Phi(\xi) d\xi.$$

Удовлетворяя условию (4.11), как и в работе [55], получаем интегральное уравнение относительно $\Phi(x)$, $0 \leq x < +\infty$:

$$\Phi(x) + \int_0^x K_1(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi = 2\tau_2(x) - \Phi(-x) - \\ - \int_{-x}^0 K_1(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x < +\infty,$$

где

$$K_1(x, \xi) = \sqrt{c} \cdot x \frac{I_1(\sqrt{c} \sqrt{x^2 - \xi^2})}{\sqrt{x^2 - \xi^2}},$$

из которого находим

$$\Phi(x) = 2\tau_2(x) - 2 \int_0^x R_1(x, t) \tau_2(t) dt + g(x), \quad 0 \leq x < +\infty,$$

здесь $R_1(x, t)$ — резольвента ядра $K_1(x, \xi)$, а

$$g(x) = -\varphi_2(-x) - \int_{-x}^0 K_1(x, t) \varphi_2(t) dt + \int_0^x R_1(x, t) \varphi_2(-t) dt + \\ + \int_0^x R_1(x, t) dt \int_{-t}^0 K_1(t, \xi) \varphi_2(\xi) d\xi.$$

Аналогичным образом, подставляя решение задачи (4.7), (4.12)

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} I_0(\sqrt{c} \sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}) \Psi(\xi) d\xi$$

в условие (4.13), определим функцию

$$\Psi(x) = -\psi(-x), \quad 0 \leq x < +\infty.$$

Тогда нетрудно заметить, что при выполнении условия (4.6) регулярное решение задачи (4.7)–(4.9) представимо в виде

$$u(x, y) = \frac{\Phi(x-y) + \Phi(x+y)}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{I_1(\sqrt{c} \sqrt{y^2 - (x-\xi)^2})}{\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}} \times \\ \times \Phi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} I_0(\sqrt{c} \sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}) \Psi(\xi) d\xi. \quad (4.14)$$

Дифференцируя (4.14) по x , затем устремляя x к нулю, получаем функциональное соотношение между $\tau_2(y)$ и $v_2(y)$, принятое из области D_2 :

$$v_2(y) = \tau_2'(y) - \int_0^y K_2(y, t) \tau_2(t) dt + g_1(y), \quad 0 \leq y < +\infty, \quad (4.15)$$

где

$$K_2(y, t) = R_{1y}(y, t) + \frac{c}{2} y R_1(y, t) + K_{1t}(y, t) - \\ - \int_t^y K_{1\xi}(y, \xi) R_1(\xi, t) d\xi,$$

$$g_1(y) = \frac{1}{2} \varphi_2'(-y) - \frac{c}{4} y \varphi_2(-y) - \frac{1}{2} \int_{-y}^0 K_{1\xi}(y, \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} g'(-y) + \frac{c}{4} y g(-y) - \frac{1}{2} \int_0^y K_{1\xi}(y, \xi) g(\xi) d\xi - \\ - \psi(-y) - \int_0^y \psi(-\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\sqrt{c} \sqrt{y^2 - \xi^2}) d\xi.$$

Как известно [95], в области D_1 решение уравнения (4.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(+0, y) = \tau_1(y), \quad u(x, 0) = \varphi_1(x),$$

имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}\right\} \tau_1(\eta) d\eta + \\ + \int_0^{+\infty} G(x, y; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi, \quad (4.16)$$

где

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4(y-\eta)}\right\} \right]$$

— функция Грина для полубесконечной прямой $x \geq 0$.

Преобразуя (4.16) с учетом равенства

$$\tau_1(\eta) = \varphi_1(0) + \int_0^\eta \tau_1'(t) dt,$$

затем продифференцируя по x и устремляя x к нулю, получаем функциональное соотношение между $\tau_1(y)$ и $v_1(y)$, принесенное из области D_1 :

$$v_1(y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \tau_1'(\eta) d\eta + V(y), \quad (4.17)$$

где

$$V(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4y}\right) \varphi_1'(\xi) d\xi.$$

Исключая из (4.15) и (4.17) функции $\tau_1(y)$, $v_1(y)$ и $v_2(y)$ с учетом условий склеивания (4.2), приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $\tau_2'(y)$:

$$\tau_2'(y) + \int_0^y K(y, \eta) \tau_2'(\eta) d\eta = g(y), \quad (4.18)$$

где

$$K(y, \eta) = \frac{1}{\beta(y)} \left\{ \frac{\alpha(\eta)}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} + \delta(y) + \right. \\ \left. + \int_\eta^y \left[\frac{\alpha'(t)}{\sqrt{\pi(y-t)}} - \beta(y) K_2(y, t) \right] dt \right\},$$

$$g(y) = \frac{1}{\beta(y)} \left\{ V(y) - \beta(y) g_1(y) - \delta(y) \varphi_2(0) - \zeta(y) - \right. \\ \left. - \frac{1}{V\pi} \int_0^y \frac{\gamma'(\eta)}{V^{y-\eta}} d\eta - \varphi_2(0) \int_0^y \left[\frac{\alpha'(\eta)}{V\pi(y-\eta)} - \beta(y) K_2(y, \eta) \right] d\eta \right\}.$$

В силу свойств функций $K(y, \eta)$ и $g(y)$ заключаем, что интегральное уравнение (4.18) допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение.

После определения $\tau_2'(y)$ из (4.18), функция $\tau_2(y)$ устанавливается по формуле

$$\tau_2(y) = \varphi_2(0) + \int_0^y \tau_2'(t) dt,$$

а $v_2(y)$ и $v_1(y)$ — по формулам (4.15) и (4.2). Тогда единственное решение задачи K в области D_2 определяется по формуле (4.14), а в области D_1 — по формуле (4.16).

Случай $c < 0$ рассматривается аналогично. Заметим также, что задачу K можно решить для уравнения (4.1) и с младшими членами, когда коэффициенты уравнения переменные.

§ 5. Смешанные задачи для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа

В области D , ограниченной отрезками прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ и $x = -1$, исследуем некоторые смешанные задачи для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + c_1(x, y)u & \text{в } D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - c_2(x)u & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $D_1 = D \cap \{x > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x < 0\}$. Пусть $I = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}$.

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{D}_i) \cap C^1(D_i \cup I)$, $i = 1, 2$;
- 2) является регулярным решением уравнения (5.1) в области D_i ($i = 1, 2$);
- 3) выполняются условия склеивания

$$\left. \begin{aligned} \tau_1(y) &= \alpha(y) \tau_2(y) + \beta(y), \\ v_1(y) &= \int_0^y \gamma(y, \eta) v_2(\eta) d\eta + \delta(y) v_2(y) + \zeta(y) \tau_2(y) + \theta(y), \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где

$$\tau_1(y) = u(+0, y), \quad v_1(y) = u_x(+0, y),$$

$$\tau_2(y) = u(-0, y), \quad v_2(y) = u_x(-0, y);$$

4) удовлетворяет краевым условиям

$$u(-1, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x \leq 0,$$

$$u(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Здесь $\psi_1'(x)$, $\varphi_1'(y)$, $\psi_2'(x)$, $\varphi_2'(y)$, $c_1(x, y)$, $c_2'(x)$, $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$, $\gamma_y(y, \eta)$, $\delta'(y)$, $\zeta'(y)$, $\theta'(y)$ — удовлетворяют условию Гёльдера, причем $c_1(x, y) \leq 0$, $\alpha(y) \neq 0$, $\gamma^2(y, \eta) + \delta^2(y) \neq 0$; кроме того,

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_2(1),$$

$$\psi_2(0) = \alpha(0) \psi_1(0) + \beta(0),$$

$$\delta(0) \psi_1'(0) + \zeta(0) \psi_1(0) + \theta(0) - \psi_2'(0) = 0 \text{ при } \delta(y) \neq 0;$$

$$\zeta(0) \psi_1(0) + \theta(0) - \psi_2'(0) = 0, \quad \beta'(0) + \alpha'(0) \psi_1(0) = 0$$

$$\text{при } \delta(y) \equiv 0,$$

$$\varphi_1(0) = \psi_1(-1), \quad \varphi_2'(0) = 0.$$

(5.3)

Отметим, что задача 1 возникает при изучении распространения колебания в составных электрических линиях [98] и совместно-раздельных движениях вязких и вязкоупругих жидкостей в плоской трубе [2].

Сначала рассмотрим следующую задачу:

$$u_{xx} - u_{yy} - c_2(x) u = 0, \quad (5.4)$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (5.5)$$

$$u(-1, y) = \varphi_1(y), \quad u(-0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Продолжим функцию $c_2(x)$ на отрезок $[-2, -1]$ и $[0, 1]$ с сохранением класса, а функцию $\psi_1(x)$ — определенным образом, точный вид которого будет указан ниже.

При определенных предположениях относительно функций $c_2(x)$ и $\psi_1(x)$ решение задачи Коши (5. 4), (5. 5) можно представить в виде [55]

$$u(x, y) = \frac{\psi_1(x+y) + \psi_1(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} w(x, y, t) \psi_1(t) dt, \quad (5.6)$$

где $w(x, y, t)$ — решение задачи Гурса:

$$w_{tt} - w_{yy} - c_2(t)w = 0,$$

$$w(x, y, x+y) = -\frac{1}{2} \int_0^y c_2(x+s) ds,$$

$$w(x, y, x-y) = -\frac{1}{2} \int_0^y c_2(x-s) ds.$$

Пользуясь условием $u(-0, y) = \tau_2(y)$, из (5.6) получим уравнение для определения $\psi_1(y)$ при $0 \leq y \leq 1$:

$$\psi_1(y) + \psi_1(-y) + \int_{-y}^y w(0, y, t) \psi_1(t) dt = 2\tau_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (5.7)$$

Если $\tau_2(0) = \psi_1(0)$, $\tau_2'(0) = 0$, то продолженная по формуле (5.7) функция $\psi_1(x)$ принадлежит классу $C^2[-1, 1]$ [55], а указанные условия имеют места при выполнении первых двух условий из (5.3).

Если через $R_1(y, t)$ обозначим резольвенту ядра $w(0, y, t)$, то из (5.7) имеем

$$\psi_1(y) = 2\tau_2(y) - 2 \int_0^y R_1(y, t) \tau_2(t) dt + g_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

где

$$g_1(y) = -\psi_1(-y) - \int_{-y}^0 w(0, y, t) \psi_1(t) dt + \\ + \int_0^y R_1(y, t) \psi_1(-t) dt + \int_0^y R_1(y, t) dt \int_{-t}^0 w(0, t, s) \psi_1(s) ds.$$

Таким же образом продолжим $\psi_1(x)$ на отрезок $[-2, -1]$:

$$\psi_1(y) = g_2(y) + \int_0^y R_2(y, t) g_2(t) dt, \quad -2 \leq y \leq -1,$$

где $R_2(y, t)$ — резольвента ядра $w(-1, -1-y, t)$, а

$$g_2(y) = 2\varphi_1(-1-y) \psi_1(-2-y) - \int_0^{-2-y} w(-1, -1-y, t) \psi_1(t) dt.$$

Итак, функция

$$\tilde{\psi}_1(x) = \begin{cases} g_2(x) + \int_0^x R_2(y, t) g_2(t) dt, & -2 \leq x \leq -1, \\ \psi_1(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ 2\tau_2(x) - 2 \int_0^x R_1(x, t) \tau_2(t) dt + g_1(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

в силу (5.3) дважды непрерывно дифференцируема на $[-2, 1]$. Тогда функция

$$u(x, y) = \frac{\tilde{\psi}_1(x+y) + \tilde{\psi}_1(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} w(x, y, t) \tilde{\psi}_1(t) dt \quad (5.8)$$

дает решение задачи Коши: (5.4), $u(x, 0) = \tilde{\psi}_1(x)$, $u_y(x, 0) = 0$, $-2 \leq x \leq 1$.

Подставляя (5.8) в условие $u_x(-0, y) = v_2(y)$, имеем

$$v_2(y) = \tau_2'(y) + \int_0^y K_1(y, t) \tau_2(t) dt + g_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(y, t) &= w_x(0, y, t) - R_{1y}(y, t) + \\ &+ \frac{1}{2} R_1(y, t) \int_0^y c_2(t) dt - \int_t^y w_x(0, y, s) R_1(s, t) ds, \\ g_3(y) &= \frac{1}{2} g_1'(y) + \frac{1}{2} \psi_1'(-y) - \frac{1}{4} g_1(y) \int_0^y c_2(t) dt + \\ &+ \frac{1}{4} \psi_1(-y) \int_0^y c_2(-t) dt + \frac{1}{2} \int_{-y}^0 w_x(0, y, t) \psi_1(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^y w_x(0, y, t) g_1(t) dt. \end{aligned}$$

Решая в области D_1 первую краевую задачу для уравнения (5.1), убеждаемся, что решение $u(x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \int_0^y d\eta \int_0^1 c_1(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi,$$

где

$$u_0(x, y) = \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) \tau_1(\eta) d\eta + V(x, y),$$

$$V(x, y) = \int_0^y G(x, y; \xi, 0) \psi_2(\xi) d\xi - \int_0^y G_\xi(x, y; 1, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta,$$

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\},$$

решение которого можно выписать через резольвенту $R(x, y; \xi, \eta)$ ядра $c_1(x, y) G(x, y; \xi, \eta)$:

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \int_0^y d\eta \int_0^1 R(x, y; \xi, \eta) u_0(\xi, \eta) d\xi.$$

Отсюда, дифференцируя по x и переходя к пределу при $x \rightarrow +0$, получим соотношение между $\tau_1(y)$ и $\nu_1(y)$:

$$\nu_1(y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\tau_1'(t)}{(y-t)^{1/2}} dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{k(y, t)}{(y-t)^{1/2}} \tau_1'(t) dt + \\ + \int_0^y \Phi(y, t) \tau_1(t) dt + P(y), \quad (5.10)$$

где

$$k(y, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{n^2}{y-t} \right),$$

$$\Phi(y, t) = \int_0^y d\eta' \int_0^1 R_x(0, y; \xi', \eta') G_\xi(\xi', \eta'; 0, t) d\xi',$$

$$P(y) = V_x(0, y) - \psi_2(0) \frac{1+k(y; 0)}{\sqrt{\pi y}} + \\ + \int_0^y d\eta \int_0^1 R_x(0, y; \xi, \eta) V(\xi, \eta) d\xi.$$

Исключая из (5.9), (5.10) и (5.2) функции $\tau_2(y)$, $\nu_1(y)$ и $\nu_2(y)$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\tau_1'(t)}{\sqrt{y-t}} dt = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{k(y, t)}{\sqrt{y-t}} \tau_1'(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^y \Phi(y, t) \tau_1(t) dt + P(y) - \int_0^y \frac{\gamma(y, t)}{\alpha(t)} \tau_1'(t) dt - \\
& - \frac{\delta(y)}{\alpha(y)} \tau_1'(y) - \left[\delta(y) q_1(y) + \frac{\zeta(y)}{\alpha(y)} \right] \tau_1(y) - \\
& - \int_0^y \left[\gamma(y, t) q_1(t) + \frac{\delta(y)}{\alpha(t)} K_1(y, t) + \right. \\
& \left. + \int_t^y \frac{\gamma(y, \eta)}{\alpha(\eta)} K_1(\eta, t) d\eta \right] \tau_1(t) dt - \theta(y) - \\
& - \delta(y) g_4(y) + \frac{\zeta(y) \beta(y)}{\alpha(y)} - \int_0^y \gamma(y, t) g_4(t) dt, \tag{5.11}
\end{aligned}$$

где

$$q_1(y) = -\frac{\alpha'(y)}{\alpha^2(y)},$$

$$g_4(y) = g_3(y) - \frac{\beta'(y)}{\alpha(y)} + \frac{\beta(y)}{\alpha^2(y)} - \int_0^y \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} K_1(y, t) dt.$$

Введя в (5.11) обозначение $\tau_1'(y) = \mu(y)$, получим

$$\frac{1}{V\pi} \int_0^y \frac{\mu(t)}{V y - t} dt = -\frac{\delta(y)}{\alpha(y)} \mu(y) - \int_0^y K_2(y, t) \mu(t) dt + g_5(y), \tag{5.12}$$

где

$$\begin{aligned}
K_2(y, t) &= \frac{k(y, t)}{V\pi(y-t)} + \frac{\gamma(y, t)}{\alpha(t)} + \delta(y) q_1(y) + \frac{\zeta(y)}{\alpha(y)} + \\
& + \int_t^y \left[q_1(\eta) \gamma(y, \eta) - \Phi(y, \eta) + \frac{\delta(y)}{\alpha(\eta)} K_1(y, \eta) + \right. \\
& \left. + \int_\eta^y \frac{\gamma(y, s)}{\alpha(s)} K_1(s, \eta) ds \right] d\eta, \\
g_5(y) &= P(y) - \delta(y) g_4(y) - \theta(y) + \frac{\beta(y) \zeta(y)}{\alpha(y)} - \\
& - \psi_2(0) \left[\delta(y) q_1(y) + \frac{\zeta(y)}{\alpha(y)} \right] -
\end{aligned}$$

$$- \int_0^y \left\{ \gamma(y, t) g_4(t) - \psi_2(0) \Phi(y, t) + \psi_2(0) \left[\gamma(y, t) q_1(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\delta(y)}{\alpha(t)} K_1(y, t) + \int_t^y \frac{\gamma(y, \eta)}{\alpha(t)} K_1(\eta, t) d\eta \right] \right\} dt.$$

Если $\delta(y) \neq 0$, то (5.12) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с ядром со слабой особенностью, которое в силу свойств функции $K_2(y, \eta)$ и $g_5(y)$ допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение.

Если же $\delta(y) \equiv 0$, то после обращения уравнения (5.12) приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$\mu(y) + \int_0^y K_3(y, t) \mu(t) dt = g_6(y),$$

где

$$K_3(y, t) = \frac{1}{V\pi} \left[\frac{K_2(t, t)}{V y - t} + \int_t^y \frac{K_{27}(\eta, t)}{V y - \eta} d\eta \right],$$

$$g_6(y) = \frac{1}{V\pi} \int_0^y \frac{g_5'(t)}{V y - t} dt,$$

которое также допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение.

Затем $\tau_1(y)$ определим по формуле

$$\tau_1(y) = \psi_2(0) + \int_0^y \mu(t) dt,$$

а $\tau_2(y)$, $v_2(y)$ и $v_1(y)$ — из (5.2), (5.9) и (5.10), после чего решение задачи 1 восстанавливается в области D_1 как решение первой краевой задачи для уравнения (5.11), а в области D_2 — по формуле (5.8).

Единственность решения задачи 1 следует из того, что полученное интегральное уравнение относительно $\mu(y)$ допускает единственное решение, а также из единственности решения первой краевой задачи в области D_1 для уравнения (5.1) и смешанной задачи для уравнения (5.4).

Аналогично изучается и следующая задача.

Задача 2. Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи 1, кроме

$$u(-1, y) = \varphi_1(y),$$

вместо которого берется условие

$$u_x(-1, y) - hu(-1, y) = \varphi_1(y). \quad (5.13)$$

При решении задачи 2 функцию $\psi_1(x)$ продолжим на отрезок $[-2, -1]$, пользуясь условием (5.13). В этом случае для определения $\psi_1(x)$ при $x \in [-2, -1]$ получаем интегродифференциальное уравнение, которое можно привести к уравнению Вольтерра второго рода. Продолженная таким образом функция $\psi_1(x)$ при выполнении условий

$$\psi_1'(-1) - h\psi_1(-1) = \varphi_1(0), \quad \varphi_1'(0) = 0$$

принадлежит классу C^2 [55].

Далее задача 2 решается аналогично задаче 1.

§ 6. Нелокальная задача типа задачи Бицадзе-Самарского для парабола-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа

Для парабола-гиперболических уравнений с двумя характеристической и нехарактеристической линиями изменения типа могут быть поставлены и изложенными методами изучены корректные краевые задачи, аналогичные тем, которые рассмотрены в § 1 — 5. Ограничимся указанием схемы решения лишь одной задачи.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + a_1(x, y)u_x + c_1(x, y)u & \text{в } D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_i(x, y)u_x + b_i(x, y)u_y + c_i(x, y)u & \text{в } D_i (i = 2, 3), \end{cases} \quad (6.1)$$

где D_1 и D_2 — области, определенные в § 1, а D_3 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком $AA_0(0, 1)$ оси y и двумя характеристиками A_0C_0 : $x - y = -1$, AC_0 : $x + y = 0$ уравнения (6.1), выходящими из точек A и A_0 , пересекающимися в точке $C_0(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Совокупность областей $D_i (i = \overline{1, 3})$ вместе с открытыми отрезками AB и AA_0 обозначим через D .

В области D , содержащей в себе как характеристическую (AB), так и нехарактеристическую (AA_0) линии изменения типа уравнения (6.1), исследуется следующая нелокальная задача.

Задача Г. Требуется определить функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

$$1) u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D);$$

2) $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (6.1) в каждой из областей D_i ($i = \overline{1, 3}$);

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{BC} = \psi_1(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (6.2)$$

$$u|_{AC_0} = \psi_2(y), \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \quad (6.3)$$

$$\sum_{k=1}^n \{ \beta_k(y) u_x(x_k, y) + \alpha_k(y) u(x_k, y) \} + \gamma(y) = u_x(1, y), \quad (6.4)$$

здесь $\alpha_k, \beta_k, \gamma, \psi_i$ — известные функции из класса $C^1[0, 1]$, причем $\psi_i \in C^2[0, 1]$ ($i = 1, 2$). Относительно коэффициентов уравнения (6.1) предполагается выполнение условий: $a_i, b_i \in C^2(D_i)$, $c_i \in C^1(\overline{D_i})$ ($i = \overline{1, 3}$), $c_1(x, y) \leq 0$.

Докажем существование решения задачи Γ путем его построения. Пользуясь решением задачи Коши (см. § 1) и условиями (6.2), (6.3), приходим к соотношениям

$$\tau_1(x) = g_1(x) + \int_x^1 T_1(x, t) v_1(t) dt, \quad (6.5)$$

$$\tau_2(y) = g_2(y) - \int_0^y T_2(y, t) v_2(t) dt, \quad (6.6)$$

где $\tau_1(x) = u(x, 0)$, $\tau_2(y) = u(0, y)$, $v_1(x) = u_y(x, 0)$, $v_2(y) = u_x(0, y)$, принесенным из гиперболических областей D_2 и D_3 . В формулах (6.5), (6.6) $g_i(z)$, $T_i(z, t)$ — известные функции, обладающие такими же свойствами, как $g(x)$ и $T(x, t)$ в задаче T § 1.

В силу непрерывности $u_y(x, 0)$ в D при $y \rightarrow +0$ получим соотношение:

$$\tau_1''(x) + a_1(x, 0) \tau_1'(x) + c_1(x, 0) \tau_1(x) = v_1(x), \quad (6.7)$$

принесенное из области D_1 .

Проинтегрировав уравнение (6.7) один раз и подставив в полученное равенство значение $\tau_1(x)$ из соотношения (6.5), придем к интегральному уравнению относительно неизвестной функции $v_1(x)$:

$$v_1(x) + \int_1^x K(x, t) v_1(t) dt = p_0(x) - \mu_0, \quad (6.8)$$

здесь

$$\begin{aligned} K(x, t) &= 1 + a_1(t, 0) T_{1x}(x, t) + \int_1^x \{a_1(\xi, 0) T_{1\xi}(\xi, t) + \\ &\quad + c_1(\xi, 0) T_1(\xi, t)\} d\xi, \\ p_0(x) &= g_1'(x) + \int_1^x [a_1(\xi, 0) g_1'(\xi) + c_1(\xi, 0) g_1(\xi)] d\xi, \end{aligned}$$

а μ_0 — неизвестная константа, значение которой определим позднее.

Согласно условиям, налагаемым на данные задачи Γ , заключаем, что $K(x, t)$, $p_0(x)$ и их производные по x непрерывны в областях своего определения. Следовательно, (6.8) является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода, единственное решение которого представимо в виде

$$v_1(x) = p_0(x) - \int_1^x R(x, t) \{p_0(t) - \mu_0\} dt - \mu_0, \quad (6.9)$$

здесь $R(x, t)$ — резольвента ядра $K(x, t)$, которая может быть построена по общей теории интегральных уравнений (см. [59]).

Согласно (6.5), (6.9) находим

$$\tau_1(x) = q_1(x) + \mu_0 q_2(x), \quad (6.10)$$

где

$$\begin{aligned} q_1(x) &= g_1(x) - \int_1^x T(x, t) p_0(t) dt + \\ &\quad + \int_1^x \int_1^t T_1(x, t) R(t, \xi) p_0(\xi) d\xi dt, \\ q_2(x) &= \int_1^x T_1(x, t) dt - \int_1^x \int_1^t T_1(x, t) R(t, \xi) d\xi dt, \\ \mu_0 &= \frac{\psi_2(0) - q_1(0)}{q_2(0)}, \text{ если } q_2(0) \neq 0. \end{aligned}$$

После определения $\tau_1(x)$, $v_1(x)$ решение задачи Γ в области D восстанавливается как решение задачи Коши.

Решение уравнения (6.1) в области D_1 , удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = \tau_2(y), \quad u_x|_{x=1} = v(y), \quad u|_{y=0} = \tau_1(x),$$

можно представить в виде

$$u(x, y) = \int_0^1 \tau_1(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi + \int_0^y \tau_2(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta + \\ + \int_0^y v(\eta) G(x, y; 1, \eta) d\eta - \int_0^y \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) V(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (6.11)$$

здесь

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi-4n)^2}{4(y-\eta)} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[-\frac{(x+\xi-4n)^2}{4(y-\eta)} \right] + \exp \left[-\frac{(x+\xi-2-4n)^2}{4(y-\eta)} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[-\frac{(x-\xi-2-4n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\}$$

— функция Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности [49], а $V(x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$V(x, y) - \int_0^y \int_0^1 W(x, y; \xi, \eta) V(\xi, \eta) d\xi d\eta = p_1(x, y) + \\ + \int_0^y L_1(x, y; \eta) \tau_2'(\eta) d\eta - \int_0^y W(x, y; 1, \eta) v(\eta) d\eta, \quad (6.12)$$

где

$$W(x, y; \xi, \eta) = a_1(x, y) G_x(x, y; \xi, \eta) + c_1(x, y) G(x, y; \xi, \eta),$$

$$L_1(x, y; \eta) = a_1(x, y) N(x, y; 0, \eta) - \int_\eta^y c_1(x, y) G_\xi(x, y; 0, t) dt,$$

$p_1(x, y)$ — известная непрерывно дифференцируемая функция, а

$$N(x, y; 0, \eta) = \frac{1}{4\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-4n)^2}{4(y-\eta)} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[-\frac{(x-2-4n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\}.$$

Левая часть уравнения (6.12) является интегральным оператором типа Вольтерра и не имеет собственных значений [99].

Обращая (6.12) относительно $V(x, y)$, находим

$$V(x, y) = \bar{p}_1(x, y) + \int_0^y \bar{L}_1(x, y; t) \tau_2'(t) dt - \\ - \int_0^y \bar{W}(x, y; t) v(t) dt, \quad (6.13)$$

где

$$\bar{p}_1(x, y) = p_1(x, y) + \int_0^y \int_0^1 \Gamma(x, y; \xi, \eta) p_1(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ — резольвента ядра $W(x, y; \xi, \eta)$,

$$\bar{L}_1(x, y; t) = L_1(x, y; t) + \int_t^y \int_0^1 \Gamma(x, y; \xi, \eta) L_1(\xi, \eta; t) d\xi d\eta,$$

$$\bar{W}(x, y; t) = W(x, y; 1, t) + \int_t^y \int_0^1 \Gamma(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta; 1, t) d\xi d\eta.$$

Исключая из (6.11), (6.13) и (6.6) функции $\tau_2(y)$, $V(x, y)$ получаем

$$u(x, y) = \int_0^y \Phi_0(x, y; \eta) v_2(\eta) d\eta + \\ + \int_0^y \Phi_1(x, y, \eta) v(\eta) d\eta + f_1(x, y), \quad (6.14)$$

где

$$\Phi_0(x, y; \eta) = - \int_{\eta}^y G_{\xi}(x, y; 0, t) T_1(t, \eta) dt + \\ + \int_{\eta}^y \int_{\eta}^t \int_0^1 G(x, y; \xi, t) \bar{L}_1(\xi, t; s) T_{2s}(s, \eta) d\xi ds dt,$$

$$\Phi_1(x, y; \eta) = G(x, y; 1, \eta) + \int_{\eta}^y dt \times \\ \times \int_0^1 G(x, y; \xi, t) \bar{W}(\xi, t; \eta) d\xi,$$

$$f_1(x, y) = \int_0^1 \tau_1(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi - \int_0^y \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) \bar{p}_1(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) g_2(\eta) d\eta - \int_0^y \int_\eta^y \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) \bar{L}_1(\xi, \eta; t) \times \\ \times g_2'(t) d\xi dt d\eta.$$

Продифференцировав (6.14) по x , затем перейдя к пределу при $x \rightarrow 0$, найдем

$$v_2(y) = \int_0^y \Phi_{0x}(0, y; \eta) v_2(\eta) d\eta + \\ + \int_0^1 \Phi_{1x}(0, y; \eta) v(\eta) d\eta + f_{1x}(0, y), \quad (6.15)$$

причем

$$|\Phi_{0x}(0, y; \eta)| < \frac{c_1}{\sqrt{y-\eta}}, \quad |\Phi_{1x}(0, y; \eta)| < c_2,$$

$$|f_{1x}(0, y)| < c_3, \quad c_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Подставляя (6.14) в (6.4), после некоторых несложных преобразований получаем второе интегральное уравнение

$$v(y) = \int_0^y s_1(y, \eta) v(\eta) d\eta + \int_0^y s_2(y, \eta) v_2(\eta) d\eta + F(y), \quad (6.16)$$

где

$$s_1(y, \eta) = \sum_{k=1}^n \{ \beta_k(y) \Phi_{1x}(x_k, y; \eta) + \alpha_k(y) \Phi_1(x_k, y; \eta) \},$$

$$s_2(y, \eta) = \sum_{k=1}^n \{ \beta_k(y) \Phi_{0x}(x_k, y; \eta) + \alpha_k(y) \Phi_0(x_k, y; \eta) \},$$

$$F(y) = \gamma(y) + \sum_{k=1}^n \{ \beta_k(y) f_{1x}(x_k, y) + \alpha_k(y) f(x_k, y) \},$$

причем $|s_1(y, \eta)| < c_4$, $|s_2(y, \eta)| < c_5$, $c_4, c_5 = \text{const}$.

Таким образом, разрешимость поставленной задачи эквивалентным образом сведена к разрешимости системы интегральных уравнений (6.15), (6.16) типа Вольтерра второго рода, которая согласно теории системы интегральных уравнений имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение [59].

В заключение отметим, что краевые задачи для параболического уравнения с двумя фиксированными и неизвестными линиями изменения типов исследованы в диссертации [101].

Глава 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ

Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа в трехмерной цилиндрической области рассмотрены впервые А. В. Бицадзе [10, 11, 13]. Затем в ряде работ изучены краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений в бесконечных цилиндрических областях [63, 42, 70 и др.].

В настоящей главе исследуются задачи Трикоми и Геллерстедта для параболо-гиперболических уравнений в бесконечных призматических и цилиндрических областях.

§ 1. Трехмерный аналог задачи Трикоми

Пусть Ω — бесконечная призматическая область трехмерного евклидова пространства переменных x , y и z , ограниченная поверхностью $\Gamma = \bigcup_{n=1}^5 \Gamma_n$, где

$$\Gamma_1: x=0, 0 \leq y \leq h; \Gamma_2: x=1, 0 \leq y \leq h;$$

$$\Gamma_3: x+y=0, 0 \leq x \leq 1/2; \Gamma_4: x-y=1, \frac{1}{2} \leq x \leq 1;$$

$$\Gamma_5: y=h, 0 \leq x \leq 1;$$

$$\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0), \Omega_2 = \Omega \cap (y < 0),$$

$$D = \Omega \cap (z=0), D_1 = D \cap (y > 0), D_2 = D \cap (y < 0),$$

$$\bar{I} = \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2, \sigma_n = \Gamma_n \cap (z=0), n = \bar{1}, \bar{5}.$$

Для уравнения

$$0 = \begin{cases} U_y - U_{xx} - U_{zz} & \text{в } \Omega_1, \\ U_{yy} - U_{xx} - U_{zz} & \text{в } \Omega_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

рассматривается следующая задача.

Задача Т. Найти регулярное решение уравнения (1.1) в областях Ω_i ($i = 1, 2$), обладающее следующими свойствами;

- 1) $U(x, y, z) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$;
- 2) удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} U|_{\Gamma_1} &= \Phi_1(y, z), \quad -\infty < z < +\infty, \\ U|_{\Gamma_2} &= \Phi_2(y, z), \quad -\infty < z < +\infty, \\ U|_{\Gamma_3} &= \Psi(x, z), \quad -\infty < z < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U_z(x, y, z) = 0. \quad (1.3)$$

Решение поставленной задачи будем искать в классе функций, представимых интегралом Фурье

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, \lambda) e^{-i\lambda z} d\lambda. \quad (1.4)$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма. Пусть функция $u(x, y, \lambda)$ в области D является решением уравнения

$$0 = \begin{cases} u_y - u_{xx} + \lambda^2 u & \text{в } D_1, \\ u_{yy} - u_{xx} + \lambda^2 u & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (1.5)$$

таким, что интеграл (1.4) допускает дифференцирование, указанное в уравнении (1.1) по каждому из параметров x, y, z , тогда функция $U(x, y, z)$, определяемая этим интегралом, является решением уравнения (1.1). Обратно, если $U(x, y, z)$ есть решение уравнения (1.1), представимое интегралом (1.4) и удовлетворяющее условиям (1.3), то $u(x, y, \lambda)$, определяемая по формуле

$$u(x, y, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, z) e^{i\lambda z} dz, \quad (1.6)$$

является решением уравнения (1.5).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству, указанному в работе [10] (см. также [13]). Таким образом, задача T эквивалентно сведена к следующей плоской задаче.

Задача T_λ . Требуется определить регулярное решение уравнения (1.5) в области D_i ($i=1,2$), обладающее следующими свойствами:

- 1) $u(x, y, \lambda) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$;
- 2) удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} u|_{\sigma_1} &= \varphi_1(y, \lambda), \quad -\infty < \lambda < +\infty, \\ u|_{\sigma_2} &= \varphi_2(y, \lambda), \quad -\infty < \lambda < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

$$u|_{z_s} = \psi(x, \lambda), \quad -\infty < \lambda < +\infty,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k(y, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(y, z) e^{i\lambda z} dz, \quad k = 1, 2, \\ \psi(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, z) e^{i\lambda z} dz. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Функции $\varphi_k(y, \lambda)$ непрерывны, а $\psi(x, \lambda)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция по x и $\varphi_1(0, \lambda) = \psi(0, \lambda)$. В дальнейшем на эти функции будут наложены дополнительные ограничения.

Докажем единственность решения задачи T_λ . Отметим, что для коэффициентов уравнения (1.5) в области D_2 известные условия, указанные в работе [106], не выполняются. Поэтому доказать единственность решения задачи T_λ с помощью принципа экстремума сразу не удастся. Несмотря на это, при помощи некоторого приема [42] можно получить оценку функции $u(x, y, \lambda)$, из которого следует единственность решения задачи T_λ . Это делается следующим образом. Введем новую неизвестную функцию $v(x, y, \lambda)$ по формуле

$$u(x, y, \lambda) = v(x, y, \lambda) \exp \left(\frac{2\sqrt{1+4\lambda^2}x + y}{4} \right). \quad (1.9)$$

Тогда функция $v(x, y, \lambda)$ будет решением уравнения

$$0 = \begin{cases} L_1[v] \equiv -v_{xx} + v_y - \sqrt{1+4\lambda^2} v_x & \text{в } D_1, \\ L_2[v] \equiv -v_{xx} + v_{yy} - \sqrt{1+4\lambda^2} v_x + \frac{1}{2} v_y - \frac{3}{16} v & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (1.10)$$

коэффициенты которого в области D_2 удовлетворяют известным условиям Агмона, Ниренберга, Проттера [106].

Принцип максимума. Пусть $v(x, y, \lambda)$ обладает свойствами:

- 1) $v(x, y, \lambda) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$;
- 2) $v(x, y, \lambda)$ удовлетворяет в D_1 неравенству $L_1[v] \leq 0$, а в D_2 — неравенству $L_2[v] \geq 0$;

$$3) v_y(-y, y, \lambda) - v_x(-y, y, \lambda) \geq 0, \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq 0, \quad (1.11)$$

т. е. является не убывающей функцией от y на характеристике σ_3 , тогда положительный максимум функции $v(x, y, \lambda)$ в $\bar{D}$ достигается на отрезках $\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_2$.

Доказательство. Пусть функция $v(x, y, \lambda)$, удовлетворяющая всем условиям теоремы, достигает в некоторой точке $Q \in J$ положительного максимума. На основании известной теоремы (см. [106], § 4, теорема 2') в точке положительного максимума имеем $v_y(Q) > 0$. Но, с другой стороны, из уравнения (1.10) при $y \rightarrow +0$ получим $v_y(Q) \leq 0$, что противоречит предыдущему неравенству. Следовательно, $v(x, y, \lambda)$ внутри D не может достигать положительного максимума и если достигает, то только на отрезках $\bar{\sigma}_1$ или $\bar{\sigma}_2$, что и требовалось доказать.

В области D определим функцию $w(x, y, \lambda)$ так:

$$w(x, y, \lambda) = \pm v(x, y, \lambda) + \rho(x, \lambda),$$

где $v(x, y, \lambda)$ — регулярное решение уравнения (1.10), а $\rho(x, \lambda) = M [\exp(-\sqrt{1+4\lambda^2}x) - 2]$, M — неотрицательное постоянное.

Заметим, что $L_1[w(x, y, \lambda)] = 0$ и $L_2[w(x, y, \lambda)] \geq 0$ в D_1 и D_2 соответственно. Для того, чтобы функция $w(x, y, \lambda)$ удовлетворяла условию (1.11), достаточно положить

$$M = \exp\left(\frac{\sqrt{1+4\lambda^2}}{2}\right) \max_{\sigma_3} |v_y(-y, y, \lambda) - v_x(-y, y, \lambda)|. \quad (1.12)$$

При таком выборе M функция $w(x, y, \lambda)$ достигает положительного максимума на $\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_2$, откуда следует, что

$$w(x, y, \lambda) \leq \max_{\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_2} |w(x, y, \lambda)|$$

или

$$|v(x, y, \lambda)| \leq \max_{\bar{\sigma}_1} |v(x, y, \lambda)| + \max_{\bar{\sigma}_2} |v(x, y, \lambda)| + 5M. \quad (1.13)$$

Так как

$$v(x, y, \lambda) = \exp\left(-\frac{2\sqrt{1+4\lambda^2}x+y}{4}\right) u(x, y, \lambda),$$

то, переходя в (1.13) к функции $u(x, y, \lambda)$, находим

$$\begin{aligned} M &\leq \exp(\sqrt{1+4\lambda^2}) \max |\psi'_x(x, \lambda)| + \\ &+ \frac{2\sqrt{1+4\lambda^2}-1}{4} \exp(\sqrt{1+4\lambda^2}) \max |\psi(x, \lambda)|. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Теперь из оценки (1.13) с учетом (1.14) имеем

$$\begin{aligned}
|u(x, y, \lambda)| \leq & \exp\left(\frac{2\sqrt{1+4\lambda^2}+h}{4}\right) \left[\max |\varphi_1(y, \lambda)| + \right. \\
& \left. + \exp\left(-\frac{\sqrt{1+4\lambda^2}}{2}\right) \max |\varphi_2(y, \lambda)| + \right. \\
& + \frac{7}{4}(2\sqrt{1+4\lambda^2}-1) \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda^2}\right) \max |\psi(x, \lambda)| + \\
& \left. + 7 \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda^2}\right) \max |\psi'_x(x, \lambda)| \right]. \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Из (1.15) следует единственность решений задач T_λ и T . В самом деле, пусть $\Phi_k(y, z) = 0$, $k = 1, 2$, $\Psi(x, z) = 0$. По формулам (1.8) имеем $\varphi_k(y, \lambda) = 0$, $k = 1, 2$, $\psi(x, \lambda) = 0$. Тогда из оценки (1.15) следует, что $u(x, y, \lambda) \equiv 0$. Отсюда в силу (1.4) получаем $U(x, y, z) \equiv 0$.

Перейдем к доказательству существования решения задачи T_λ . Примем обозначения

$$u(x, 0, \lambda) = \tau(x, \lambda), \quad \frac{\partial u(x, 0, \lambda)}{\partial y} = \nu(x, \lambda). \quad (1.16)$$

Из постановки задачи T_λ следует, что функции $\tau(x, \lambda)$ и $\nu(x, \lambda)$ на линии $y = 0$ связаны соотношением

$$\tau''(x, \lambda) - \lambda^2 \tau(x, \lambda) = \nu(x, \lambda). \quad (1.17)$$

Решение этого уравнения в промежутке $0 < x < 1$, удовлетворяющее крайевым условиям

$$\tau(0, \lambda) = \varphi_1(0, \lambda), \quad \tau(1, \lambda) = \varphi_2(0, \lambda), \quad (1.18)$$

представляется в виде

$$\tau(x, \lambda) = a(x, \lambda) + \int_0^1 G(x, t, \lambda) \nu(t, \lambda) dt, \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned}
a(x, \lambda) = & \varphi_1(0, \lambda) + x [\varphi_2(0, \lambda) - \varphi_1(0, \lambda)] + \\
& + \lambda^2 \int_0^1 G(x, t, \lambda) \{ \varphi_1(0, \lambda) + t [\varphi_2(0, \lambda) - \varphi_1(0, \lambda)] \} dt,
\end{aligned}$$

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \lambda (1-t) \operatorname{sh} \lambda x}{\lambda \operatorname{sh} \lambda}, & 0 \leq t \leq x, \\ \frac{\operatorname{sh} \lambda t \operatorname{sh} \lambda (1-x)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda}, & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

— функция Грина краевой задачи (1.17), (1.18).

Чтобы получить второе соотношение между функциями $\tau(x, \lambda)$ и $\nu(x, \lambda)$, рассмотрим решение уравнения (1.5) в области D_2 , удовлетворяющее условиям (1.16) (см. [95], с. 139):

$$\begin{aligned} u(x, y, \lambda) = & \frac{\tau(x+y, \lambda) + \tau(x-y, \lambda)}{2} - \\ & - \frac{\lambda y}{2} \int_{x-y}^{x+y} \frac{I_1[\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}]}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \tau(\xi, \lambda) d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} I_0[\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}] \nu(\xi, \lambda) d\xi, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где I_0 и I_1 — вещественные функции Бесселя мнимого аргумента нулевого и первого порядков соответственно.

Отсюда, реализуя последнее условие (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \tau(x, \lambda) + \int_0^x \frac{x}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} I_0[\lambda \sqrt{\xi(\xi-x)}] \tau(\xi, \lambda) d\xi = \\ = \psi_1(x, \lambda) + \int_0^x I_0[\lambda \sqrt{\xi(\xi-x)}] \nu(\xi, \lambda) d\xi, \end{aligned}$$

где $\psi_1(x, \lambda) = 2\psi\left(\frac{x}{2}, \lambda\right) - \psi(0, \lambda)$, из которого в силу формулы обращения для таких уравнений [20] имеем

$$\tau(x, \lambda) = p(x, \lambda) + \int_0^x I_0[\lambda(x-\xi)] \nu(\xi, \lambda) d\xi, \quad (1.21)$$

где

$$p(x, \lambda) = \psi_1(x, \lambda) - \int_0^x \psi_1(\xi, \lambda) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0[\lambda \sqrt{x(x-\xi)}] d\xi.$$

Исключая $\tau(x, \lambda)$ из (1.19) и (1.21), получаем

$$\int_0^x I_0[\lambda(x-\xi)] \nu(\xi, \lambda) d\xi = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \nu(\xi, \lambda) d\xi + a(x, \lambda) - p(x, \lambda). \quad (1.22)$$

Нетрудно убедиться, что обращение интегрального уравнения

$$\int_0^x \varphi(\xi) I_0[\lambda(x-\xi)] d\xi = F(x)$$

с учетом тождества [71]

$$\int_0^z I_p(c\xi) I_q[c(z-\xi)] \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{p} I_{p+q}(cz) \quad (\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > -1)$$

может быть записано в виде

$$\varphi(x) = F'(x) - \lambda \int_0^x F(\xi) \frac{I_1[\lambda(x-\xi)]}{x-\xi} d\xi.$$

Поэтому из (1.22) приходим к интегральному уравнению

$$v(x, \lambda) - \int_0^1 K(x, \xi, \lambda) v(\xi, \lambda) d\xi = g(x, \lambda), \quad (1.23)$$

где

$$K(x, \xi, \lambda) = G_x(x, \xi, \lambda) - \lambda \int_0^x G(t, \xi, \lambda) \frac{I_1[\lambda(x-t)]}{x-t} dt,$$

$$g(x, \lambda) = a_x(x, \lambda) - p_x(x, \lambda) - \lambda \int_0^x [a(t, \lambda) - p(t, \lambda)] \times$$

$$\times \frac{I_1[\lambda(x-t)]}{x-t} dt.$$

На основании свойств функции $G(x, \xi, \lambda)$ и функций Бесселя I_ν ($\nu = 0, 1$), заключаем:

1) $K(x, \xi, \lambda)$ в промежутках $0 \leq x < t$, $t < x \leq 1$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x ;

2) $g(x, \lambda)$ непрерывно дифференцируема в $0 < x < 1$.

Таким образом, если существует решение $v(x, \lambda)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (1.23), то оно непрерывно дифференцируемо в $0 < x < 1$. Из единственности решения задачи T_λ вытекает разрешимость интегрального уравнения (1.23).

После определения функций $v(x, \lambda)$ и $\tau(x, \lambda)$ решение задачи T_λ в области D_2 выписывается в виде (1.20), а в области D_1 находится из решения первой краевой задачи для уравнения (1.5) с условиями

$$u|_{\sigma_1} = \varphi_1(y, \lambda), \quad u|_{\sigma_2} = \varphi_2(y, \lambda), \quad u|_{y=0} = \tau(x, \lambda).$$

Оно имеет вид

$$u(x, y, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^y \exp[-\lambda^2(y-\eta)] \varphi_1(\eta, \lambda) G_{\xi}^*(x, y; 0, \eta) d\eta - \right. \\ \left. - \int_0^y \exp[-\lambda^2(y-\eta)] \varphi_2(\eta, \lambda) G_{\xi}^*(x, y; 1, \eta) d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \exp(-\lambda^2 y) \tau(\xi, \lambda) G^*(x, y; \xi, 0) d\xi \right\},$$

где

$$G^*(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [V(x, y, \xi + 2n, \eta) - V(x, y, -\xi + 2n, \eta)],$$

$$V(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right], & y > \eta, \\ 0, & y \leq \eta \end{cases}$$

— функция Грина [28].

Учитывая оценку (1.15) функции $u(x, y, \lambda)$, можно на краевые функции $\Phi_k(y, z)$ ($k=1, 2$), $\Psi(x, z)$ наложить условия, обеспечивающие существование интеграла (1.4). Для этого из оценки (1.15) при больших значениях параметра λ имеем

$$|u(x, y, \lambda)| \leq \exp\left(\frac{h}{4}\right) \left[\exp(|\lambda|) \max |\varphi_1(y, \lambda)| + \right. \\ \left. + \max |\varphi_2(y, \lambda)| + 7|\lambda| \exp(2|\lambda|) \max |\psi(x, \lambda)| + \right. \\ \left. + 7 \exp(2|\lambda|) \max |\psi'_x(x, \lambda)| \right]. \quad (1.24)$$

Пусть функции $\Phi_k(y, z)$ ($k=1, 2$), $\Psi(x, z)$ таковы, что для функций $\varphi_k(y, \lambda)$ ($k=1, 2$), $\psi(x, \lambda)$ имеют место оценки

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(y, \lambda) &= O\left(\frac{1}{|\lambda|^x \exp(|\lambda|)}\right), \quad \varphi_2(y, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^x}\right), \\ \psi(x, \lambda) &= O\left(\frac{1}{|\lambda|^{x+1} \exp(2|\lambda|)}\right), \\ \psi'_x(x, \lambda) &= O\left(\frac{1}{|\lambda|^x \exp(2|\lambda|)}\right), \quad x > 3. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Тогда из (1.24) получаем оценку

$$u(x, y, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right),$$

которая обеспечивает существование интеграла (1.4), дающего решение задачи T . Из указанных оценок также следует выполнение условий (1.3).

§ 2. Задача T для парабола-гиперболического уравнения, вырождающегося в гиперболической части области

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} U_y - U_{xx} - U_{zz} & \text{в } \Omega_1, \\ U_{yy} + y(U_{xx} + U_{zz}) & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

где Ω_1 — область, определенная в § 1 этой главы, а Ω_2 — цилиндрическая область пространства переменных (x, y, z) , ограниченная поверхностями

$$\Gamma_3: x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$\Gamma_4: x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$I: y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Пусть $\Omega = \Omega_1 \cup I \cup \Omega_2$, $D = \Omega \cap (z = 0)$, $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = -D \cap (y < 0)$, $\sigma_i = \Gamma_i \cap (z = 0)$, $i = \overline{1, 5}$.

Задача T . Требуется найти функцию $U(x, y, z)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}$, обладающую непрерывными производными первого порядка и удовлетворяющую следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} U|_{\Gamma_k} &= \Phi_k(y, z), \quad (k = 1, 2), \quad 0 \leq y \leq h, \quad -\infty < z < +\infty, \\ U|_{\Gamma_3} &= \Psi(x, z), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad -\infty < z < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U_x(x, y, z) = 0. \quad (2.3)$$

Как и выше, в силу леммы § 1 этой главы задача T для уравнения (2.1) эквивалентно сводится к определению регулярного решения уравнения

$$0 = \begin{cases} -u_{xx} + u_y + \lambda^2 u & \text{в } D_1, \\ u u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (2.4)$$

удовлетворяющего условиям (1.7).

Для доказательства единственности решения задачи T_λ , т. е. задачи (2.4), (1.7) введем новую функцию

$$u(x, y, \lambda) = e^{|\lambda|x} v(x, y, \lambda). \quad (2.5)$$

Тогда уравнение (2.4) переходит в уравнение

$$0 = \begin{cases} L_1[v] \equiv -v_{xx} + v_y - 2|\lambda|v_x & \text{в } D_1, \\ L_2[v] \equiv v v_{xx} + v_{yy} + 2|\lambda|v v_x & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

для коэффициентов которого в области D_2 выполняются условия теоремы 2', указанной в работе [106], и имеет место указанный в § 1 принцип максимума.

Чтобы получить оценку, аналогичную оценке (1.15), рассмотрим вспомогательную функцию

$$z(x, y, \lambda) = \pm v(x, y, \lambda) + \rho(x, y, \lambda), \quad (2.7)$$

где $v(x, y, \lambda)$ — регулярное решение уравнения (2.6); $\rho(x, y, \lambda) = M \exp[2x + 4(1 + |\lambda|)y]$; M — неотрицательное постоянное.

Нетрудно проверить, что $L_1[z] = 0$ и $L_2[z] \geq 0$ в D_1 и D_2 . Если положим

$$M = \max_{\sigma_2} \left| v_y \left(\frac{2}{3}(-y)^{3/2}, y, \lambda \right) - (-y)^{1/2} v_x \left(\frac{2}{3}(-y)^{3/2}, y, \lambda \right) \right|, \quad (2.8)$$

то функция $z(x, y, \lambda)$ удовлетворяет всем условиям указанного принципа максимума, следовательно, имеет место оценка

$$z(x, y, \lambda) \leq \max_{\sigma_1} |z(x, y, \lambda)| + \max_{\sigma_2} |z(x, y, \lambda)|. \quad (2.9)$$

Далее, поступая так же, как и в § 1, получаем окончательную оценку [с учетом (2.9)]:

$$\begin{aligned} |u(x, y, \lambda)| &\leq \exp(|\lambda|) \max |\varphi_1(y, \lambda)| + \max |\varphi_2(y, \lambda)| + \\ &+ M_1 |\lambda| \exp(|\lambda|h_1) \max |\psi(x, \lambda)| + M_1 \exp(|\lambda|h_1) \max |\psi'_x(x, \lambda)|, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$M_1 = 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} \exp(1 + h_1), \quad h_1 = 1 + 4h.$$

Из (2.10) следует единственность решения задачи T_λ . Тем самым доказана единственность решения задачи T , представимого формулой (1.4).

Переходим к доказательству существования решения задачи T_λ . Как известно [92], решение уравнения (2.6) в области D_2 ,

удовлетворяющее условиям $u_y|_{y=0} = v(x, \lambda)$, $u|_{x_0} = \psi(x, \lambda)$, имеет вид

$$u(x, y, \lambda) = \int_0^{\xi} K(\xi, \eta; t, \lambda) v(t, \lambda) dt + \int_0^{\eta} \psi_1(t, \lambda) L(\xi, \eta; t, \lambda) dt, \quad (2.11)$$

где $K(\xi, \eta, t, \lambda)$, $L(\xi, \eta, t, \lambda)$ — известные функции; $\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, $\eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$. Отсюда, полагая $y = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \tau(x, \lambda) = & k \int_0^x (x-t)^{-1/3} v(t, \lambda) dt + \int_0^x K(x, t, \lambda) v(t, \lambda) dt + \\ & + \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \int_0^x \frac{t^{1/3} \psi_1(t, \lambda) dt}{x^{1/6}(x-t)^{1/6}} + \int_0^x \psi_1(\tau, \lambda) l(x, t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, t, \lambda) = & -\frac{\lambda^2}{4} \cdot \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \int_t^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1/6}} \int_{\xi}^{\tau} \frac{K(\xi, \eta; t, \lambda)}{(x-\eta)^{1/6}} d\eta, \\ \psi_1(t, \lambda) = & \psi'(t, \lambda) + \frac{\psi(t, \lambda)}{6t}, \quad k = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \cdot \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)\Gamma(1/3)}, \end{aligned}$$

а $l(x, t, \lambda)$ — известная функция.

Формула (2.11) дает первое функциональное соотношение между $\tau(x, \lambda)$ и $v(x, \lambda)$, принесенное из области D_2 .

Второе функциональное соотношение между $\tau(x, \lambda)$ и $v(x, \lambda)$, принесенное из области D_1 , имеет вид (см. § 1)

$$\tau(x, \lambda) = a(x, \lambda) + \int_0^1 G(x, t, \lambda) v(t, \lambda) dt. \quad (2.13)$$

Исключая $\tau(x, \lambda)$ из (2.12) и (2.13), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{v(t, \lambda)}{(x-t)^{1/3}} dt = & \frac{1}{k} \left[a(x, \lambda) + \int_0^1 G(x, t, \lambda) v(t, \lambda) dt - \right. \\ & \left. - \int_0^x K(x, t, \lambda) v(t, \lambda) dt - \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)\Gamma(1/3)} \int_0^x \frac{t^{1/3} \psi_1(t, \lambda) dt}{x^{1/6}(x-t)^{1/6}} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \int_0^x \psi_1(t, \lambda) l(x, t, \lambda) dt \right]. \quad (2.14)$$

Применяя формулу обращения Абеля, из (2.13) приходим к уравнению

$$v(x, \lambda) + \int_0^x K_1(x, t, \lambda) v(t, \lambda) dt = \Phi_1(x, \lambda),$$

где

$$\begin{aligned} K_1(x, t, \lambda) &= \frac{\sqrt{3}}{2k\pi} \int_t^x \frac{K_s(s, t, \lambda)}{(x-s)^{2/3}} ds, \\ \Phi_1(x, \lambda) &= \frac{\sqrt{3}}{2k\pi} \int_0^1 v(t, \lambda) dt \int_0^x \frac{G_s(s, t, \lambda)}{(x-s)^{2/3}} ds + F(x, \lambda), \\ F(x, \lambda) &= \frac{\sqrt{3}}{2k\pi} \cdot \frac{d}{dx} \left[\int_0^x \frac{a(s, \lambda) ds}{(x-s)^{2/3}} - \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)\Gamma(1/3)} \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{2/3}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^s \frac{t^{1/3} \psi_1(t, \lambda) dt}{s^{1/6}(s-t)^{1/6}} - \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{2/3}} \int_0^s \psi_1(t, \lambda) l(s, t, \lambda) dt \right]. \end{aligned}$$

Обращая полученное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, имеем

$$v(x, \lambda) + \int_0^1 K_0(x, t, \lambda) v(t, \lambda) dt = F_0(x, \lambda), \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} K_0(x, t, \lambda) &= \frac{\sqrt{3}}{2k\pi} \left[\int_0^x R_1(x, z, \lambda) dz \int_0^z \frac{G_s(s, t, \lambda)}{(z-s)^{2/3}} ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x \frac{G_s(s, t, \lambda)}{(x-s)^{2/3}} ds \right], \end{aligned}$$

$$F_0(x, \lambda) = F(x, \lambda) - \int_0^x R_1(x, t, \lambda) F(t, \lambda) dt,$$

а $R_1(x, t, \lambda)$ — резольвента ядра $K_1(x, t, \lambda)$.

На основании исследования правой части уравнения Фредгольма второго рода (2.15) и свойств функции $G(x, \xi, \lambda)$ заключаем:

1) $K_0(x, t, \lambda)$ в промежутках $0 \leq x < t$, $t < x \leq 1$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x ;

2) $F_0(x, \lambda)$ непрерывно дифференцируема в $0 < x \leq 1$ и $\frac{dF_0}{dx}$ при $x \rightarrow 0$ стремится в бесконечность порядка $2/3$.

Таким образом, если существует решение $v(x, \lambda)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.15), то оно непрерывно дифференцируемо в $0 < x \leq 1$; а при $x=0$ первая производная имеет особенность порядка $2/3$.

Из единственности решения задачи T_λ вытекает разрешимость интегрального уравнения (2.15).

После определения функций $v(x, \lambda)$ и $\tau(x, \lambda)$ решение задачи T_λ в области D_2 выписывается в виде (2.11), а в области D_1 находится как решение первой краевой задачи для уравнения (2.4) с условиями

$$u|_{\sigma_1} = \varphi_1(y, \lambda), \quad u|_{\sigma_2} = \varphi_2(y, \lambda), \quad u|_{y=0} = \tau(x, \lambda).$$

Оценка (2.10) показывает, что для существования интеграла (1.4) от данных задачи T достаточно требовать выполнения условий (1.25).

З а м е ч а н и е 2.1. Аналогично изучается задача T и в случае, когда коэффициент y в уравнении (2.1) заменится на $-(y)^m$, где $m > 0$.

§ 3. Трехмерный аналог задачи Геллерстедта

Пусть Ω — бесконечная призматическая область пространства переменных (x, y, z) , ограниченная плоскостями

$$\begin{aligned} \Gamma_1: x &= 0, \quad \Gamma_2: x = 1, \quad \Gamma_3: x + y = 0, \\ \Gamma_4: x + y &= \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad \Gamma_5: x - y = \varepsilon, \\ \Gamma_6: x - y &= 1, \quad \Gamma_7: y = h, \quad h > 0, \end{aligned}$$

а

$$\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0), \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{(x, y, z): 0 < x < \varepsilon, y < 0, -\infty < z < +\infty\},$$

$$\Omega_3 = \Omega \cap \{(x, y, z): \varepsilon < x < 1, y < 0, -\infty < z < +\infty\},$$

$$D = \Omega \cap (z = 0), \quad D_n = \Omega_n \cap (z = 0), \quad n = \overline{1, 3},$$

$$\sigma_n = \Gamma_n \cap (z = 0), \quad n = \overline{1, 7},$$

$$\bar{J}_0 = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2, \quad \bar{J}_1 = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_3, \quad J_n = J_n \cap (z = 0), \quad n = 0, 1, \quad E = \bar{J}_0 \cap \bar{J}_1.$$

Для уравнения (1.1) в области Ω будем изучать аналог одной задачи Геллерстедта.

Задача G_n . Найти регулярное в области Ω_n ($n = \overline{1, 3}$) решение уравнения (1.1), обладающее свойствами:

$$1) U(x, y, z) \in C(\overline{\Omega}_n) \cap [C^1(\Omega_1 \cup J_0 \cup J_1) \cup$$

$$\cup C^1(\Omega_2 \cup J_0) \cup C^1(\Omega_3 \cup J_1)], \quad n = \overline{1, 3};$$

$$2) U(x, y, z) \text{ удовлетворяет условиям (1.3) и}$$

$$\left. \begin{aligned} U|_{\Gamma_n} &= \Phi_n(y, z), \quad n = 1, 2, \quad -\infty < z < +\infty, \\ U|_{\Gamma_n} &= \Psi_{n-2}(x, z), \quad n = 3, 4, \quad -\infty < z < +\infty; \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

3) функции $U(x, y, z)$ и $U_y(x, y, z)$ удовлетворяют условиям склеивания

$$\left. \begin{aligned} U(x, -0, z) &= \alpha U(x, +0, z), \\ U_y(x, -0, z) &= \beta_n(x) U_y(x, +0, z) + \delta_n(x) U(x, +0, z) + \\ &+ Z_n(x, z), \quad (x, z) \in J_n, \quad n = 0, 1; \\ \alpha &= \text{const}, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} Z_n(x, z) = 0, \quad n = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Решение задачи G_n будем искать в классе функций, представимых интегралом Фурье (1.4).

В силу леммы § 1 задача G_n эквивалентно сводится к плоской задаче для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_y - u_{xx} + \lambda^2 u & \text{в } D_1, \\ u_{yy} - u_{xx} + \lambda^2 u & \text{в } D_n (n = 2, 3). \end{cases} \quad (3.3)$$

Задача $G_{n\lambda}$. Требуется определить регулярное в областях D_n ($n = \overline{1, 3}$) решение уравнения (3.3), обладающее следующими свойствами:

$$1) \quad u(x, y, \lambda) \in C(\overline{D}_n) \cap [C^1(D_1 \cup J_0 \cup J_1) \cup$$

$$\cup C^1(D_2 \cup J_0) \cup C^1(D_3 \cup J_1)], \quad n = \overline{1, 3};$$

$$2) \quad u(x, y, \lambda) \text{ удовлетворяет условиям}$$

$$\left. \begin{aligned} u|_{\sigma_n} &= \varphi_n(y, \lambda), \quad n = 1, 2, \quad -\infty < \lambda < +\infty, \\ u|_{\sigma_n} &= \psi_{n-2}(x, \lambda), \quad n = 3, 4, \quad -\infty < \lambda < +\infty; \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

3) функции $u(x, y, \lambda)$ и $u_y(x, y, \lambda)$ удовлетворяют условиям склеивания

$$\left. \begin{aligned} u(x, -0, \lambda) &= \alpha u(x, +0, \lambda), \\ u_y(x, -0, \lambda) &= \beta_n(x) u_y(x, +0, \lambda) + \\ &+ \delta_n(x) u(x, +0, \lambda) + \zeta_n(x, \lambda), \quad x \in j_n, \quad n = 0, 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

здесь $\beta_n(x)$, $\delta_n(x)$ и $\zeta_n(x, \lambda)$ непрерывны и

$$\left. \begin{aligned} \alpha \beta_n(x) &> 0, \\ \alpha [\beta_n(x) + 4\delta_n(x) - \alpha] &\leq 0, \quad \zeta_n(x, \lambda) \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

функции $\varphi_n(y, \lambda)$ непрерывны, а $\psi_n(x, \lambda)$ — дважды непрерывно дифференцируемы и $\alpha \varphi_1(0, \lambda) = \psi_1(0, \lambda)$. В дальнейшем на эти функции будут наложены дополнительные ограничения.

Для доказательства единственности решения задачи $G_{\alpha\lambda}$ в области D введем в рассмотрение новую неизвестную функцию $v(x, y, \lambda)$ по формуле (1.9). Тогда для функции $v(x, y, \lambda)$ получаем уравнение (1.10). Условия склеивания (3.5) при этом имеют вид

$$\begin{aligned} v(x, -0, \lambda) &= \alpha v(x, +0, \lambda), \\ v_y(x, -0, \lambda) &= \beta_n(x) v_y(x, +0, \lambda) + \\ &+ \tilde{\delta}_n(x) v(x, +0, \lambda) + \tilde{\zeta}_n(x, \lambda), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_n(x) &= \frac{1}{4} [\beta_n(x) + 4\delta_n(x) - \alpha], \\ \tilde{\zeta}_n(x, \lambda) &= \zeta_n(x, \lambda) \exp \left(-\frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\lambda^2} \cdot x \right). \end{aligned}$$

Если положим

$$w(x, y, \lambda) = \begin{cases} \alpha v(x, y, \lambda) = w^+(x, y, \lambda), & (x, y) \in D_1, \\ v(x, y, \lambda) = w^-(x, y, \lambda), & (x, y) \in D_n, \quad n = 2, 3, \end{cases}$$

то функция $w(x, y, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$0 = \begin{cases} L_1[w] & \text{в } D_1, \\ L_2[w] & \text{в } D_n (n = 2, 3), \end{cases} \quad (3.7)$$

где L_1 и L_2 определены по формуле (1.10) и условиям склеивания

$$\left. \begin{aligned} w(x, -0, \lambda) &= w(x, +0, \lambda), \\ w_y(x, -0, \lambda) &= \frac{\beta_n(x)}{\alpha} w_y(x, +0, \lambda) + \\ &+ \frac{\tilde{\delta}_n(x)}{\alpha} w(x, +0, \lambda) + \tilde{\zeta}_n(x, \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Принцип максимума. Пусть $w(x, y, \lambda)$ обладает свойствами:

- 1) $w(x, y, \lambda) \in C(\bar{D}_n)$, $n = \overline{1, 3}$;
- 2) выполняются условия склеивания (3.8);
- 3) $w(x, y, \lambda)$ удовлетворяет в области D_1 неравенству $L_1[w] \leq 0$, а в областях D_n ($n = 2, 3$) — неравенству $L_2[w] \geq 0$;
- 4)

$$\left. \begin{aligned} w_y(-y, y, \lambda) - w_x(-y, y, \lambda) &\geq 0, & -\frac{\varepsilon}{2} \leq y \leq 0, \\ w_y(\varepsilon - y, y, \lambda) - w_x(\varepsilon - y, y, \lambda) &\geq 0, & \frac{\varepsilon - 1}{2} \leq y \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

т. е. является неубывающей функцией от y на характеристиках σ_3 и σ_4 . Тогда положительный максимум функции $w(x, y, \lambda)$ в области $\bar{D}$ достигается на $\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_2 \cup E$. Доказательство этого принципа максимума вполне аналогично доказательству принципа максимума, приведенного в § 1.

Чтобы получить априорную оценку для функции $w(x, y, \lambda)$ в области D , определим функцию $\tilde{w}(x, y, \lambda)$ следующим образом:

$$\tilde{w}(x, y, \lambda) = \pm w(x, y, \lambda) + \rho(x, \lambda),$$

где $w(x, y, \lambda)$ — регулярное решение уравнения (3.7), а

$$\rho(x, \lambda) = (M_1 + M_2) [\exp(-\sqrt{1+4\lambda^2} \cdot x) - 2],$$

M_1 и M_2 — неотрицательные постоянные.

Нетрудно проверить, что $L_1[\tilde{w}(x, y, \lambda)] = 0$ в D_1 и $L_2[\tilde{w}(x, y, \lambda)] \geq 0$ в D_n ($n = 2, 3$). Для того чтобы функция $\tilde{w}(x, y, \lambda)$ удовлетворяла условиям (3.9), достаточно положить

$$M_1 = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{1+4\lambda^2}\right) \max_{\sigma_3} |w_y(-y, y, \lambda) - w_x(-y, y, \lambda)|,$$

$$M_2 = \exp\left(-\frac{\varepsilon+1}{2} \sqrt{1+4\lambda^2}\right) \max_{\sigma_4} |w_y(\varepsilon-y, y, \lambda) - w_x(\varepsilon-y, y, \lambda)|.$$

При таком выборе постоянных M_1 и M_2 функция $\tilde{w}(x, y, \lambda)$ достигает положительного максимума на $\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_2 \cup E$, откуда следует, что

$$\tilde{w}(x, y, \lambda) \leq \max_{\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_2 \cup E} |\tilde{w}(x, y, \lambda)|$$

или

$$|\varpi(x, y, \lambda)| < \max_{\overline{\sigma_1} \cup \overline{\sigma_2} \cup E} |\varpi(x, y, \lambda)| + 7(M_1 + M_2).$$

Далее, переходя от функции $\varpi(x, y, \lambda)$ к функции $u(x, y, \lambda)$, окончательно будем иметь оценку решения задачи $G_{\alpha\lambda}$:

$$\begin{aligned} |u(x, y, \lambda)| \leq & K \exp\left(\frac{1}{2} \sqrt{1+4\lambda^2}\right) \left[|\alpha| \max |\varphi_1(y, \lambda)| + \right. \\ & + |\alpha| \exp\left(-\frac{1}{2} \sqrt{1+4\lambda^2}\right) \max |\varphi_2(y, \lambda)| + \\ & + \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{1+4\lambda^2}\right) |\psi_2(\varepsilon, \lambda)| + \\ & + \frac{7}{4} \left(2 \sqrt{1+4\lambda^2} - 1\right) \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{1+4\lambda^2}\right) \max |\psi_1(x, \lambda)| + \\ & + 7 \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{1+4\lambda^2}\right) \max |\psi'_{1x}(x, \lambda)| + \\ & + \frac{7}{4} \left(2 \sqrt{1+4\lambda^2} - 1\right) \exp\left(\frac{1}{2} \sqrt{1+4\lambda^2}\right) \max |\psi_2(x, \lambda)| + \\ & \left. + 7 \exp\left(\frac{1}{2} \sqrt{1+4\lambda^2}\right) \max |\psi'_{2x}(x, \lambda)| \right], \quad (3.10) \end{aligned}$$

где

$$K = K_1 \exp\left(\frac{h}{4}\right), \quad K_1 = \max\left(1, \frac{1}{|\alpha|}\right).$$

Единственность решения задачи $G_{\alpha\lambda}$ следует из оценки (3.10); тем самым будет доказана единственность решения задачи G_α в классе функций, представимых интегралом Фурье.

Доказательство существования решения задач $G_{\alpha\lambda}$ и G_α . Введем обозначения

$$u(x, +0, \lambda) = \tau_1(x, \lambda), \quad u_y(x, +0, \lambda) = v_1(x, \lambda),$$

$$u(x, -0, \lambda) = \tau_2(x, \lambda), \quad u_u(x, -0, \lambda) = v_2(x, \lambda).$$

Из уравнения (3.3) получаем, что функции $\tau_1(x, \nu)$ и $v_1(x, \lambda)$ на линии $y = 0$ связаны соотношением

$$\tau_1''(x) - \lambda^2 \tau_1(x, \lambda) = v_1(x, \lambda).$$

Решение этого уравнения в промежутках $0 \leq x \leq \varepsilon$ и $\varepsilon \leq x \leq 1$, удовлетворяющее крайним условиям

$$\tau_1(0, \lambda) = \varphi_1(0, \lambda), \quad \tau_1(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{\alpha} \psi_2(\varepsilon, \lambda)$$

и

$$\tau_1(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{\alpha} \psi_2(\varepsilon, \lambda), \quad \tau_1(1, \lambda) = \varphi_2(0, \lambda),$$

представляется в виде

$$\tau_1(x, \lambda) = a_1(x, \lambda) + \int_0^\varepsilon G_1(x, t, \lambda) v_1(t, \lambda) dt \quad (3.11)$$

и

$$\tau_1(x, \lambda) = a_2(x, \lambda) + \int_\varepsilon^1 G_2(x, t, \lambda) v_1(t, \lambda) dt, \quad (3.12)$$

где

$$G_1(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \lambda (\varepsilon - t) \operatorname{sh} \lambda x}{\lambda \operatorname{sh} \lambda \varepsilon}, & 0 < t < x, \\ \frac{\operatorname{sh} \lambda t \operatorname{sh} \lambda (\varepsilon - x)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda \varepsilon}, & x < t < \varepsilon, \end{cases}$$

$$G_2(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \lambda (1 - t) \operatorname{sh} \lambda (x - \varepsilon)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda (1 - \varepsilon)}, & \varepsilon < t < x, \\ \frac{\operatorname{sh} \lambda (t - \varepsilon) \operatorname{sh} \lambda (1 - x)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda (1 - \varepsilon)}, & x < t < 1 \end{cases}$$

— функции Грина;

$$a_1(x, \lambda) = \varphi_1(0, \lambda) + \frac{x}{\alpha \varepsilon} [\psi_2(\varepsilon, \lambda) - \alpha \varphi_1(0, \lambda)] +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^\varepsilon G_1(x, t, \lambda) \left\{ \varphi_1(0, \lambda) + \frac{t}{\varepsilon} [\psi_2(\varepsilon, \lambda) - \alpha \varphi_1(0, \lambda)] \right\} dt,$$

$$a_2(x, \lambda) = \frac{1}{\alpha} \psi_2(\varepsilon, \lambda) + \frac{x - \varepsilon}{\alpha (1 - \varepsilon)} [\alpha \varphi_2(0, \lambda) - \psi_2(\varepsilon, \lambda)] +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{\alpha} \int_\varepsilon^1 G_2(x, t, \lambda) \left\{ \psi_2(\varepsilon, \lambda) + \frac{t - \varepsilon}{1 - \varepsilon} [\alpha \varphi_2(0, \lambda) - \psi_2(\varepsilon, \lambda)] \right\} dt.$$

Для получения соотношения между $\tau_2(x, \lambda)$ и $v_2(x, \lambda)$, принесенного из областей D_2 и D_3 , рассмотрим решение задачи Коши для уравнения (3.3), представимое по формуле (1.20).

Реализуя последние два условия из (3.4), получаем соотношения

$$\tau_2(x, \lambda) - \frac{\lambda(x - \varepsilon_n)}{2} \int_{\varepsilon_n}^x \frac{I'_0(\lambda \sqrt{(\xi - \varepsilon_n)(\xi - x)})}{V(\xi - \varepsilon_n)(\xi - x)} \tau_2(\xi, \lambda) d\xi -$$

$$- \int_{\varepsilon_n}^x I_0(\lambda \sqrt{(\xi - \varepsilon_n)(\xi - x)}) v_2(\xi, \lambda) d\xi = \psi_1^*(x, \lambda), \quad n = 0, 1,$$

где

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \psi_0^*(x, \lambda) = 2\psi_1\left(\frac{x}{2}, \lambda\right) - \psi_1(0, \lambda),$$

$$\psi_1^*(x, \lambda) = 2\psi_2\left(\frac{x + \varepsilon}{2}, \lambda\right) - \psi_2(\varepsilon, \lambda).$$

Далее, поступая как и в § 1, после некоторых преобразований приходим к соотношениям

$$\tau_2(x, \lambda) = p_n(x, \lambda) + \int_{\varepsilon_n}^x I_0[\lambda(x - \xi)] v_2(\xi, \lambda) d\xi, \quad n = 0, 1, \quad (3.13)$$

где

$$p_n(x, \lambda) = \psi_n^*(x - \varepsilon_n, \lambda) - \int_{\varepsilon_n}^x \psi_n^*(\xi - \varepsilon_n, \lambda) \frac{\partial}{\partial \xi} \times$$

$$\times I_0[\lambda \sqrt{(x - \xi)(x - \varepsilon_n)}] d\xi.$$

Исключая из (3.11) и (3.13) ($n = 0$) функции $\tau_1(x, \lambda)$, $\tau_2(x, \lambda)$ и $v_1(x, \lambda)$ с учетом условий склеивания (3.5), получаем равенство

$$\int_0^x I_0[\lambda(x - \xi)] v_2(\xi, \lambda) d\xi = \int_0^\varepsilon H_1(x, \xi, \lambda) v_2(\xi, \lambda) d\xi + \tilde{p}_0(x, \lambda),$$

где

$$H_1(x, \xi, \lambda) = \frac{\alpha}{\beta_0(\xi)} G_1(x, \xi, \lambda) - \int_\xi^\varepsilon \frac{\delta_0(t)}{\beta_0(t)} G_1(x, t, \lambda) I_0[\lambda(t - \xi)] dt,$$

$$\tilde{p}_0(x, \lambda) = \alpha a_1(x, \lambda) - p_0(x, \lambda) -$$

$$- \int_0^\varepsilon \frac{G_1(x, \xi, \lambda)}{\beta_0(\xi)} [\delta_0(\xi) p_0(\xi, \lambda) + \alpha \zeta_0(\xi, \lambda)] d\xi,$$

из которого с помощью аналогичных вычислений § 1 имеем

$$v_2(x, \lambda) - \int_0^{\varepsilon} H(x, \xi, \lambda) v_2(\xi, \lambda) d\xi = P_0(x, \lambda), \quad (3.14)$$

$$H(x, \xi, \lambda) = H_{1x}(x, \xi, \lambda) - \lambda \int_0^x \frac{I_1[\lambda(x-t)]}{x-t} H_1(t, \xi, \lambda) dt,$$

$$P_0(x, \lambda) = \tilde{p}_{1x}(x, \lambda) - \lambda \int_0^x \frac{I_1[\lambda(x-t)]}{x-t} \tilde{p}_0(t, \lambda) dt.$$

Таким же образом из (3.12), (3.13) ($n=1$) и (3.5) получаем

$$v_2(x, \lambda) - \int_{\varepsilon}^1 L(x, \xi, \lambda) v_2(\xi, \lambda) d\xi = P_1(x, \lambda), \quad (3.15)$$

где

$$L(x, \xi, \lambda) = L_{1x}(x, \xi, \lambda) - \lambda \int_{\varepsilon}^x \frac{I_1[\lambda(x-t)]}{x-t} L_1(t, \xi, \lambda) dt,$$

$$L_1(x, \xi, \lambda) = \frac{\alpha}{p_2(\xi)} G_2(x, \xi, \lambda) - \int_{\xi}^1 \frac{\delta_2(t)}{p_2(t)} G_2(x, t, \lambda) I_0[\lambda(t-\xi)] dt,$$

$$P_1(x, \lambda) = \tilde{p}_{1x}(x, \lambda) - \lambda \int_{\varepsilon}^x \frac{I_1[\lambda(x-t)]}{x-t} \tilde{p}_1(t, \lambda) dt,$$

$$\tilde{p}_1(x, \lambda) = \alpha a(x, \lambda) - p_1(x, \lambda) - \int_{\varepsilon}^1 \frac{G_2(x, t, \lambda)}{p_2(t)} \times$$

$$\times [\delta_2(t) p_1(t, \lambda) + \alpha \zeta_1(t, \lambda)] dt.$$

Функции $H(x, \xi, \lambda)$ и $H_x(x, \xi, \lambda)$ непрерывны в промежутках $0 \leq \xi < x$, $x < \xi \leq \varepsilon$, а $P_0(x, \lambda) \in C^1(0 < x < \varepsilon_1)$. Такими же свойствами обладают функции $L(x, \xi, \lambda)$ и $P_1(x, \lambda)$.

Разрешимость интегральных уравнений Фредгольма второго рода (3.14) и (3.15) следует из единственности решения задачи $G_{\alpha\lambda}$. Решение задачи $G_{\alpha\lambda}$ в D_2 и D_3 определяется по формуле (1.20), а в D_1 — как решение первой краевой задачи для уравнения (3.3).

Пользуясь оценкой (3.10), можно подчинить краевые функции задачи G_{α} условиям, обеспечивающим существование интеграла (1.4). Для этого из оценки (3.10) при больших значениях параметра λ имеем

$$\begin{aligned}
|u(x, y, \lambda)| \leq & K \left[|\alpha| \exp(|\lambda|) \max |\varphi_1(y, \lambda)| + \right. \\
& + |\alpha| \max |\varphi_2(y, \lambda)| + \exp[(1-\varepsilon)|\lambda|] \cdot |\psi_2(\varepsilon, \lambda)| + \\
& + 7|\lambda| \exp[(1+\varepsilon)|\lambda|] \max |\psi_1(x, \lambda)| + \\
& + 7 \exp[(1+\varepsilon)|\lambda|] \max |\psi'_{1x}(x, \lambda)| + \\
& + 7|\lambda| \exp(2|\lambda|) \max |\psi_2(x, \lambda)| + \\
& \left. + 7 \exp(2|\lambda|) \max |\psi'_{2x}(x, \lambda)| \right]. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Пусть функции $\Phi_n(y, z)$, $\Psi_n(x, z)$ ($n=1, 2$) таковы, что для их преобразования Фурье $\varphi_n(y, \lambda)$, $\psi_n(x, \lambda)$ ($n=1, 2$) при больших значениях λ имеют место оценки:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y, \lambda) &= O\left(\frac{1}{|\lambda|^x \exp(|\lambda|)}\right), \quad \varphi_2(y, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^x}\right), \\
\psi_1(x, \lambda) &= O\left(\frac{1}{|\lambda|^{x+1} \exp[(1+\varepsilon)|\lambda|]}\right), \\
\psi'_{1x}(x, \lambda) &= O\left(\frac{1}{|\lambda|^x \exp[(1+\varepsilon)|\lambda|]}\right), \\
\psi_2(x, \lambda) &= O\left(\frac{1}{|\lambda|^{x+1} \exp(2|\lambda|)}\right), \\
\psi'_{2x}(x, \lambda) &= O\left(\frac{1}{|\lambda|^x \exp(2|\lambda|)}\right), \quad x > 3.
\end{aligned}$$

Тогда из (3.16) получаем оценку

$$u(x, y, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^x}\right),$$

которая обеспечивает существование интеграла (1.4), дающего решение задачи G_a .

Замечание 3.1. Мы рассмотрели задачу Трикоми и Геллерстедта для модельных уравнений парабола-гиперболического типа. С помощью указанной методики можно решить эти и некоторые другие задачи (например, задачи типа M , Бицадзе-Самарского) для более общих уравнений парабола-гиперболического типа с переменными коэффициентами в бесконечных трехмерных областях.

Глава 3. НОВЫЕ ПОСТАНОВКИ КОРРЕКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА

Вслед за теорией уравнений смешанного типа и расширением области их приложений в последние годы интенсивно развивается теория уравнений смешанно-составного типа третьего и более высокого порядков (см., например, [77, 28]). Для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, как и для всей теории уравнений с частными производными, одна из основных проблем — выявление круга корректно поставленных краевых задач.

В настоящей главе мы хотели бы обратить внимание на то, что в работах последних лет, посвященных вопросам корректной постановки краевых задач для уравнений смешанно-составного типа третьего и более высокого порядков, обсуждаются условия склеивания решений на линии изменения типа и правильное использование представления общего решения, которые играют важную роль при постановке корректных краевых задач для уравнений смешанно-составного типа. Дело в том, что для уравнений второго порядка смешанного типа непрерывными условиями склеивания, как известно, являются равенства значений искомой функции и ее нормальной производной на линии перехода ([96], с. 99—100), т. е. выполняются два условия.

В дальнейшем при постановке и изучении корректных краевых задач для уравнений смешанно-составного типа третьего и высокого порядков в ряде работ ограничивались требованием выполнения этих двух условий склеивания. По-видимому, такая постановка не естественна, так как она приводит к неоправданному увеличению числа краевых условий и не обеспечивает необходимой гладкости решения в смешанной области. В правильной постановке задач должна быть определенная зависимость между порядком уравнения и числом условий склеивания.

Приведем примеры новой постановки краевых задач с учетом указанных обстоятельств для уравнений смешанно-составного типа как с эллипτικο-гиперболическим, так и параболо-гиперболическим операторами. По поводу вопроса о правильном исполь-

зовании представления общего решения рассматриваемых уравнений см. задачу A_3 .

§ 1. Краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа с эллиптическо-гиперболическим спартером

Рассмотрим три характерные краевые задачи для модельного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Пусть D — область, ограниченная простой дугой Жордана σ с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками AC : $x + y = -1$ и BC : $x - y = 1$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

при $y < 0$.

Задача A_1 . Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D и является регулярным решением уравнения (1.1) в области D при $y \neq 0$;

2) частные производные первого и второго порядков функции $u(x, y)$ непрерывны в области D ;

3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u|_{\sigma} = f(s), \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AC} = \psi_1(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BC} = \psi_2(x), \quad (1.4)$$

где f , ψ_1 , ψ_2 — заданные функции, причем f , ψ_1'' , ψ_2'' непрерывны и $\psi_1'(0) = -\psi_2'(0)$. Части области D , для которых $y > 0$ и $y < 0$, обозначим соответственно через D_1 и D_2 . Здесь и в задаче A_3 относительно кривой σ дополнительно предположим, что она с каждой прямой $x = \text{const}$ пересекается только в одной точке.

Пусть

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) & \text{в } D_1, \\ u_2(x, y) & \text{в } D_2. \end{cases}$$

Из постановки A_1 задачи (условие 2) следует, что на линии перехода AB должны выполняться условия склеивания:

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0), \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial y}; \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 u_1(x, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_2(x, 0)}{\partial y^2} \quad (1.6)$$

и так как $u(x, y) \in C^2(D)$, то выполняются и условия $u_{1x}(x, 0) = u_{2x}(x, 0)$, $u_{1xx}(x, 0) = u_{2xx}(x, 0)$ как следствие первого из условий (1.5).

Известно, что любое регулярное решение уравнения (1.1) при $y \neq 0$ может быть представлено в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + \omega(x), \quad (1.7)$$

где $v(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1.2) при $y \neq 0$; $\omega(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция [77, 28], причем без ограничения общности можем полагать, что

$$\omega(-1) = \omega(1) = 0. \quad (1.8)$$

Замечание 1.1. Чтобы показать наглядно, какова разница новой и старой постановок краевых задач, в задачах A_1 и A_2 в представлении общего решения (1.7) уравнения (1.1) мы специально написали одну произвольную функцию $\omega(x)$ для обеих областей D_1 и D_2 . Общую постановку см. в задаче A_3 .

Согласно (1.7) общее решение уравнения (1.1) в области D_2 имеет вид

$$u(x, y) = F(x-y) + \Phi(x, y) + \omega(x), \quad (1.9)$$

здесь F , Φ , ω — производные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Пусть

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x), & -1 \leq x < 0, \\ \omega_2(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Подставляя (1.9) в условия (1.4), находим

$$\omega_1(x) = \sqrt{2} \int_0^x \psi_1(t) dt - 2\Phi'(-1)x + c_1,$$

$$\omega_2(x) = -\sqrt{2} \int_0^x \psi_2(t) dt - 2F'(1)x + c_2,$$



где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Функция $\omega(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируемой при $-1 < x < 1$. Это требование вместе с условием (1.8) определяют произвольные постоянные $c_1, c_2, \Phi'(-1), F'(1)$ и приводят к формулам

$$\begin{aligned}\omega_1(x) &= \sqrt{2} \int_0^x \psi_1(t) dt - \frac{1-x}{\sqrt{2}} \int_0^{-1} \psi_1(t) dt + \\ &+ \frac{1-x}{\sqrt{2}} \left[\int_0^1 \psi_2(t) dt - \psi_1(0) - \psi_2(0) \right], \\ \omega_2(x) &= -\sqrt{2} \int_0^x \psi_2(t) dt + \frac{1+x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \psi_2(t) dt + \\ &+ \frac{1-x}{\sqrt{2}} \left[\int_{-1}^0 \psi_1(t) dt - \psi_1(0) - \psi_2(0) \right].\end{aligned}$$

Таким образом, функция $\omega(x)$ в общем представлении (1.7) полностью определяется с помощью условий (1.4). Теперь необходимо найти функцию $v(x, y)$ в области D , пользуясь оставшимися граничными условиями и условиями склеивания.

Начнем с условий склеивания. Согласно нашим обозначениям и формуле (1.7) имеем

$$\left. \begin{aligned}u_1(x, y) &= v_1(x, y) + \omega(x), \\ u_2(x, y) &= v_2(x, y) + \omega(x).\end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned}u_{1xx} + u_{1yy} &= w''(x), \\ u_{2xx} - u_{2yy} &= w''(x).\end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

В равенствах (1.11), полагая $y=0$ и учитывая условия склеивания (1.5), (1.6), получаем

$$\begin{aligned}u_{1yy} &= u_{2yy} = u_{yy} = 0, \\ u_{1xx} &= u_{2xx} = u_{xx} = w''(x)\end{aligned}$$

или

$$u(x, 0) = \omega(x) + ax + b,$$

где a, b — произвольные постоянные, которые однозначно определяются из условий

$$u(-1, 0) = f(A), \quad u(1, 0) = f(B),$$

так что далее $ax + b$ — известная линейная функция. Итак, при $y=0$

$$v(x, 0) = ax + b. \quad (1.12)$$

До сих пор мы обеспечивали выполнение всех условий склеивания кроме $u_{1y} = u_{2y}$ при $y=0$. Это равносильно тому, что

$v_{1y} = v_{2y}$ при $y = 0$. Дальнейший ход действий таков: находим функцию $v(x, y)$ в области D_1 как решение уравнения

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad (1.13)$$

удовлетворяющее условиям

$$v|_{\sigma} = f(s) - \omega(x), \quad v|_{AB} = ax + b; \quad (1.14)$$

здесь $f - \omega(x)$ и $ax + b$ — известные функции.

Решение задачи (1.13), (1.14) выписывается в явном виде через функции Грина оператора Лапласа (см. [28], формула (2.2) в гл. IX). Затем, вычисляя производную по y от решения задачи (1.13), (1.14) и полагая $y = 0$, находим функцию $v(x) = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y}$. Для

определения функции $v(x, y)$ в области D_2 решаем задачу Коши с начальными данными

$$v|_{AB} = ax + b, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{AB} = v(x). \quad (1.15)$$

Построенное таким путем решение задачи A_1 единственно. В самом деле, если $f \equiv \psi_1 \equiv \psi_2 \equiv 0$, то согласно формулам для $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ функция $\omega(x) \equiv 0$, кроме того, $a = b = 0$. В таком случае условия (1.14) имеют вид $v|_{\sigma} = 0$, $v|_{AB} = 0$. Отсюда следует, что $v(x, y) \equiv 0$ в области D_1 и функция $v(x) = 0$. Поэтому $v(x, y) \equiv 0$ и в области D_2 . Тогда в силу (1.7) $u(x, y) \equiv 0$ в области D . Итак, задача A_1 однозначно разрешима.

Теперь изучим следующую задачу.

Задача A_2 . Найти функцию, обладающую свойствами 1), 2) задачи A_1 и удовлетворяющую граничным условиям

$$u|_{\sigma} = f(s), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\sigma} = \varphi(s), \quad (1.16)$$

где f, φ — заданные функции.

Следует отметить, что в этой задаче отсутствуют краевые условия на границе гиперболической части области, поэтому произвольную функцию $\omega(x)$, как в задаче A_1 , сразу определить невозможно. Несмотря на это, при помощи некоторого приема для определения неизвестной функции $\omega'(x)$ будем иметь сингулярное интегральное уравнение нормального типа, которое однозначно разрешимо.

Исходя из равенств (1.10) и (1.11) точно так же, как при решении задачи A_1 , имеем

$$u(x, 0) = \omega(x) + ax + b.$$

Однако здесь $\omega(x)$ — неизвестная функция, a и b — произвольные постоянные, которые однозначно определяются из условий $u(-1, 0) = f(A)$, $u(1, 0) = f(B)$, поэтому можно считать, что далее $ax + b$ — известная линейная функция.

В силу представления (1.7) при $y=0$ получим (1.12).

Итак, мы обеспечили выполнение всех условий склеивания, кроме одного: $u_{1y} = u_{2y}$ при $y=0$. Это равносильно тому, что $v_{1y} = v_{2y} = 0$ при $y=0$.

Таким образом, задача A_2 редуцируется к задаче отыскания в области D регулярного решения уравнения

$$v_{xx} + \operatorname{sgn} y v_{yy} = 0, \quad (1.17)$$

удовлетворяющего условиям

$$\left. \begin{aligned} v|_{\sigma} &= f(s) - \omega(x(s)), \\ \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\sigma} &= \varphi(s) - \omega'(x(s)), \quad v|_{AB} = ax + b. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Единственность решения задачи (1.17), (1.18) в области D_1 легко доказывается при дополнительном предположении

$$\frac{dy}{dn} \neq 0 \quad (1.19)$$

всюду вдоль кривой σ .

Рассмотрим однородную задачу (1.17), (1.18). Она равносильна определению в области D_1 решения уравнения (1.17) с граничными условиями

$$v|_{\sigma} = -\omega(x(s)), \quad v|_{AB} = 0, \quad \frac{dv}{dn} \Big|_{\sigma} = -\omega'(x) \frac{dx}{dn}. \quad (1.20)$$

Докажем, что функция $v(x, y)$ не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума на открытой дуге σ . Предположим обратное. Пусть функция $v(x, y)$ достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) в некоторой внутренней точке s_0 дуги σ . Тогда так как $v(x, y)$ на σ принимает значения функции $\omega(x(s))$, необходимое условие экстремума дает в этой точке

$$\frac{\partial \omega(x(s))}{\partial s} = \omega'(x(s)) \frac{dx}{ds} = \omega'(x(s)) \frac{dy}{dn} = 0.$$

Отсюда на основании (1.19) получаем $\omega'(x(s)) = 0$. Тогда в силу

последнего условия (1.20) в рассматриваемой точке имеем $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$.

Однако последнее равенство противоречит известному свойству гармонических функций: в граничной точке положительного максимума (отрицательного минимума) должно быть $\frac{\partial v}{\partial n} < 0$ ($\frac{\partial v}{\partial n} > 0$).

Следовательно, $v(x, y)$ не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума на дуге σ , а на AB $v=0$. Отсюда на основании принципа экстремума и равенства (1.8) заключаем, что $v = \omega(x) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$. Следовательно, $u_1 \equiv 0$ в D_1 . Из этого факта в силу условий склеивания (1.5), (1.6) при $y=0$ имеем

$$v_2|_{AB} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial y} \right|_{AB} = 0. \quad (1.21)$$

Как известно, решение задачи Коши (1.21) для уравнения

$$v_{2xx} - v_{2yy} = 0$$

есть тождественный нуль. Тогда из представления (1.10) следует, что $u_2(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_2$. Тем самым доказана единственность решения задачи A_2 .

Теперь докажем существование решения задачи (1.17), (1.18). Сначала запишем решение уравнения (1.17) в области D_1 , удовлетворяющее условиям

$$v|_{\sigma} = f(s) - \omega(x(s)), \quad v|_{AB} = ax + b. \quad (1.22)$$

Оно выражается формулой

$$v(x, y) = \int_{-1}^1 \frac{\partial G(\xi, 0; x, y)}{\partial \eta} (a\xi + b) d\xi - \\ - \int_{\sigma} f \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial G}{\partial \eta} d\xi \right) + \int_{\sigma} \omega \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial G}{\partial \eta} d\xi \right), \quad (1.23)$$

где

$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + g(\xi, \eta; x, y) -$$

функция Грина задачи (1.17), (1.22). Здесь $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$, $g(\xi, \eta; x, y)$ — регулярная часть функции Грина.

Реализуя второе условие (1.18), после некоторых вычислений получаем интегральное уравнение относительно функции $\omega'(x(s))$:

$$\begin{aligned}
& \eta'(s_0) \omega'(\xi(s_0)) + \frac{\eta'(s_0)}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{[\eta(s) - \eta(s_0)] \omega'(\xi(s)) \xi'(s)}{[\xi(s) - \xi(s_0)]^2 + [\eta(s) - \eta(s_0)]^2} ds + \\
& + \frac{\xi'(s_0)}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{[\xi(s) - \xi(s_0)] \omega'(\xi(s)) \xi'(s)}{[\xi(s) - \xi(s_0)]^2 + [\eta(s) - \eta(s_0)]^2} ds - \\
& - \eta'(s_0) \int_{\sigma} P(s, s_0) \omega'(\xi(s)) \xi'(s) ds + \\
& + \xi'(s_0) \int_{\sigma} Q(s, s_0) \omega'(\xi(s)) \xi'(s) ds = F(s_0) - \varphi(s_0), \quad (1.24)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
P(s, s_0) &= \left[\int \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \xi} \eta'(s) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \eta} \xi'(s) \right] ds \right] \Big|_{\substack{x=\xi(s_0) \\ y=\eta(s_0)}}, \\
Q(s, s_0) &= \left[\int \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \xi} \eta'(s) - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \eta} \xi'(s) \right] ds \right] \Big|_{\substack{x=\xi(s_0) \\ y=\eta(s_0)}}, \\
F(s_0) &= -\eta'(s_0) \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 G(\xi, 0; x(s_0), y(s_0))}{\partial x \partial \eta} (a\xi + b) d\xi + \\
& + \eta'(s_0) \int_{\sigma} f(s) \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \xi} \eta'(s) - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \eta} \xi'(s) \right] ds + \\
& + \xi'(s_0) \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \eta} (a\xi + b) d\xi - \\
& - \xi'(s_0) \int_{\sigma} f(s) \left[\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \xi} \eta'(s) - \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \eta} \xi'(s) \right] ds.
\end{aligned}$$

Преобразуем первые два интеграла в левой части уравнения (1.24):

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma} \frac{[\eta(s) - \eta(s_0)] \xi'(s) \omega'(\xi(s))}{[\xi(s) - \xi(s_0)]^2 + [\eta(s) - \eta(s_0)]^2} ds = \int_{\sigma} \frac{K(s, s_0)}{s - s_0} \omega'(\xi(s)) ds = \\
& = \int_{\sigma} \frac{K(s_0, s_0)}{s - s_0} \omega'(\xi(s)) ds + \int_{\sigma} \frac{K(s, s_0) - K(s_0, s_0)}{s - s_0} \omega'(\xi(s)) ds;
\end{aligned}$$

здесь

$$K(s, s_0) = \frac{(s - s_0) [\eta(s) - \eta(s_0)] \xi'(s)}{[\xi(s) - \xi(s_0)]^2 + [\eta(s) - \eta(s_0)]^2},$$

$$\begin{aligned}
K(s_0, s_0) &= \lim_{s \rightarrow s_0} K(s, s_0) = \\
&= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\frac{\eta(s) - \eta(s_0)}{s - s_0} \cdot \xi'(s)}{\left[\frac{\xi(s) - \xi(s_0)}{s - s_0} \right]^2 + \left[\frac{\eta(s) - \eta(s_0)}{s - s_0} \right]^2} = \\
&= \frac{\xi'(s_0) \eta'(s_0)}{[\xi'(s_0)]^2 + [\eta'(s_0)]^2} = \xi'(s_0) \eta'(s_0)
\end{aligned}$$

(аналогично преобразуется и второй интеграл). Подставляя эти значения в (1.24), получаем

$$\begin{aligned}
&A(s_0) \omega'(\xi(s_0)) + \frac{B(s_0)}{\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega'(\xi(s))}{s - s_0} ds + \\
&+ \frac{\eta'(s_0)}{2\pi} \int_{\sigma} \tilde{K}(s, s_0) \omega'(\xi(s)) ds + \frac{\xi'(s_0)}{2\pi} \int_{\sigma} \tilde{K}_1(s, s_0) \omega'(\xi(s)) ds - \\
&- \eta'(s_0) \int_{\sigma} P(s, s_0) \omega'(\xi(s)) \xi'(s) ds + \xi'(s_0) \times \\
&\times \int_{\sigma} Q(s, s_0) \omega'(\xi(s)) \xi'(s) ds = F(s_0) - \varphi(s_0), \tag{1.25}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A(s_0) &= \eta'(s_0), \quad B(s_0) = \frac{1}{2} i \xi'(s_0), \\
\tilde{K}(s, s_0) &= \frac{K(s, s_0) - K(s_0, s_0)}{s - s_0}, \quad \tilde{K}_1(s, s_0) = \frac{K_1(s, s_0) - K_1(s_0, s_0)}{s - s_0}, \\
K_1(s, s_0) &= \frac{(s - s_0) [\xi(s) - \xi(s_0)] \xi'(s)}{[\xi(s) - \xi(s_0)]^2 + [\eta(s) - \eta(s_0)]^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили сингулярное интегральное уравнение нормального типа для определения функции $\omega'(\xi(s))$, так как коэффициенты $A(s_0)$ и $B(s_0)$ удовлетворяют условию $A^2(s_0) - B^2(s_0) \neq 0$. Легко заметить, что концы контура σ особенные ([60], с. 392).

Из свойств функции Грина следует, что функции $P(s, s_0)$ и $Q(s, s_0)$ гладкие в области D_1 , $F(s_0) \in C^{(0, \alpha)}(s_0 \in \sigma)$, причем при $s_0 \rightarrow 0$ и $s_0 \rightarrow l$, где l — длина дуги σ , функция $F(s_0)$ имеет особенности порядка ниже единицы.

Нетрудно убедиться, что индекс уравнения (1.25) равен нулю. Регуляризируя уравнение (1.25) методом Карлемана — Векуа

[60], получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи A_2 .

Определяя из уравнения (1.25) функцию $\omega(x)$ и подставляя ее в формулу (1.23), полностью определим функцию $v(x, y)$ в области D_1 . Затем находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} = & \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 G(\xi, 0; x, 0)}{\partial y \partial \eta} (a\xi + b) d\xi - \int_{\sigma} f \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \xi} d\eta - \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \eta} d\xi \right) + \\ & + \int_{\sigma} \omega \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \xi} d\eta - \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \eta} d\xi \right). \end{aligned}$$

Решение уравнения (1.17) в области D_2 , удовлетворяющее условию (1.15), выражается известной формулой Даламбера. Прибавляя к этому решению значение функции $\omega(x)$, найденное из уравнения (1.25), получаем решение задачи A_2 в области D_2 .

Приведем пример общей постановки краевой задачи для уравнения (1.1) в указанной области D . Прежде чем сформулировать ее отметим, что уравнение (1.1) рассматривается в области D при $y \neq 0$, т. е. фактически в областях D_1 и D_2 исследуются соответственно два различных уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.27)$$

Это имеет важное значение при постановке корректных краевых задач. Дело в том, что общее решение уравнения (1.1) в области D может быть представлено в виде (1.7). При таком представлении общего решения, т. е. когда в (1.7) участвует одна произвольная функция $\omega(x)$, во всей области D для уравнения (1.1) являются корректными краевые задачи, рассмотренные в [34, 3, 39] и исследованные задачи A_1 и A_2 . Однако ввиду того, что уравнения (1.26), (1.27) в областях D_1 и D_2 совершенно автономные, в общем случае в представлении (1.7) должны участвовать произвольные функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ — одна для уравнения (1.26), другая — для уравнения (1.27). Приведенная ниже краевая задача поставлена с учетом этого общего случая.

Задача A_3 . Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и является регулярным решением уравнения (1.1) в области D при $y \neq 0$;

2) частные производные первого и второго порядков функции $u(x, y)$ непрерывны в области D ;

3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{\sigma} = f(s), \quad (1.28)$$

$$u|_{AC} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AC} = \psi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{BC} = \psi_2(x), \quad (1.29)$$

где n — внутренняя нормаль; $f, \varphi, \psi_1, \psi_2$ — заданные гладкие функции, причем $f(A) = \varphi(-1)$ и $\psi_1'(0) = -\psi_2'(0)$.

В данной задаче относительно кривой σ дополнительно предположим, что она с каждой прямой $x = \text{const}$ пересекается только в одной точке. Пусть

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) & \text{в } D_1, \\ u_2(x, y) & \text{в } D_2. \end{cases}$$

Из постановки задачи A_3 следует, что на линии перехода выполняются условия склеивания (1.5) и (1.6).

Как уже было отмечено, общие решения уравнений (1.26) и (1.27) согласно нашим обозначениям имеют вид

$$u_1(x, y) = v_1(x, y) + \omega_1(x), \quad (1.30)$$

$$u_2(x, y) = v_2(x, y) + \omega_2(x); \quad (1.31)$$

здесь $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$ — решения уравнения (1.2) в областях D_1 и D_2 ; $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Заметим, что функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ без ограничения общности могут быть подчинены условиям

$$\omega_i(-1) = \omega_i(1) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.32)$$

С учетом (1.31) функция $u_2(x, y)$ в области D_2 имеет вид

$$u_2(x, y) = F(x - y) + \Phi(x + y) + \omega_2(x), \quad (1.33)$$

где F, Φ — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Подставляя (1.33) в условия (1.29), находим

$$F(x) = \varphi\left(\frac{x-1}{2}\right) - \omega_2\left(\frac{x-1}{2}\right) - \Phi(-1),$$

$$\omega_2(x) = V\sqrt{2} \int_0^x \psi_1(t) dt - 2\Phi'(-1)x + c_1, \quad -1 \leq x \leq 0,$$

$$\omega_2(x) = -V\sqrt{2} \int_0^x \psi_2(t) dt - 2F'(1)x + c_2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Функция $\omega_2(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируемой при $-1 < x < 1$. Это требование вместе с условием (1.32) полностью определяет функцию $\omega_2(x)$ при $-1 \leq x \leq 1$ (см. задачу A_1).

Итак, решение уравнения (1.27), удовлетворяющее условиям (1.29), имеет вид

$$u_2(x, y) = \Phi(x + y) + \varphi\left(\frac{x - y - 1}{2}\right) - \\ - \omega_2\left(\frac{x - y - 1}{2}\right) + \omega_2(x) - \Phi(-1).$$

Отсюда при $y=0$ находим

$$u_{2x} - u_{2y} = \varphi'\left(\frac{x-1}{2}\right) - \omega_2'\left(\frac{x-1}{2}\right) + \omega_2'(x) \equiv \alpha(x)$$

или согласно условиям склеивания (1.5)

$$u_{1x} - u_{1y} = \alpha(x), \quad (1.34)$$

где $\alpha(x)$ — известная функция.

Из равенств (1.30) и (1.31) следует, что при $y=0$ выполняются соотношения

$$u_{1xx} + u_{1yy} = \omega_1''(x), \quad u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_2''(x). \quad (1.35)$$

Так как по условию задачи $u_{1xx} = u_{2xx}$, $u_{1yy} = u_{2yy}$ на AB , то из (1.35) находим

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \frac{1}{2} \omega_1(x) + \frac{1}{2} \omega_2(x) + ax + b. \quad (1.36)$$

В силу (1.32) произвольные постоянные a и b определяются из условий $u(-1, 0) = f(A)$, $u(1, 0) = f(B)$.

Пользуясь соотношениями (1.34) и (1.36) и учитывая условие (1.28), получим

$$u_1|_{AB} = \frac{1}{2} \omega_1(x) + \alpha_1(x), \quad u_{1y}|_{AB} = \frac{1}{2} \omega_1'(x) + \alpha_2(x), \quad u_1|_{\sigma} = f(s), \quad (1.37)$$

где

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{2} \omega_2(x) + ax + b,$$

$$\alpha_2(x) = \frac{1}{2} \omega_2'(x) - \alpha(x) + a.$$

Таким образом, задача A_3 сведена к задаче определения регулярного в области D_1 решения уравнения (1.26), удовлетворяющего краевым условиям (1.37).

Задача (1.26), (1.37) имеет решение и притом единственное. Докажем единственность решения этой задачи (тем самым будет доказана единственность решения задачи A_3). Для удобства опустим индекс 1 у функции $u_1(x, y)$ в (1.37). Однако однородной задаче A_3 соответствует задача (1.26), (1.37), где условия (1.37) имеют вид

$$u|_{AB} = \frac{1}{2} \omega_1(x), \quad u_y|_{AB} = \frac{1}{2} \omega_1'(x), \quad u|_\sigma = 0. \quad (1.38)$$

Докажем, что задача (1.26), (1.38), где $\omega_1(x)$ — произвольная функция, имеет только тривиальное решение. В силу представления (1.30) имеем

$$u_{xx} + u_{yy} = \omega_1''(x). \quad (1.39)$$

Решение уравнения (1.39), удовлетворяющее условиям (1.38), ищем в виде

$$u(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y), \quad (1.40)$$

где $w_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ — решения следующих задач соответственно:

$$w_{1xx} + w_{1yy} = 0, \quad (1.41)$$

$$w_1|_\sigma = 0, \quad w_1|_{AB} = \frac{1}{2} \omega_1(x), \quad w_{1y}|_{AB} = \frac{1}{2} \omega_1'(x). \quad (1.42)$$

$$w_{2xx} + w_{2yy} = \omega_1''(x), \quad (1.43)$$

$$w_2|_\sigma = 0, \quad w_2|_{AB} = 0, \quad w_{2y}|_{AB} = 0. \quad (1.44)$$

Докажем, что задачи (1.41), (1.42) и (1.43), (1.44) имеют только тривиальные решения. Для задачи (1.41), (1.42) достаточно показать, что на AB функция $w_1(x, y)$ не достигает ни положительного максимума, ни отрицательного минимума. Предположим наоборот, что функция w_1 в некоторой точке $(x_0, 0)$ отрезка AB достигает положительного максимума (отрицательного минимума). Тогда $w_{1x}(x_0, 0) = \frac{1}{2} \omega_1'(x_0) = 0$, отсюда $\omega_1'(x_0) = 0$. Следовательно, $w_{1y}(x_0, 0) = \frac{1}{2} \omega_1'(x_0) = 0$, что не может быть, так как в точке положительного максимума (отрицательного минимума) по теореме Заремба — Жиро имеем $w_{1y}(x_0, 0) < 0$ ($w_{1y}(x_0, 0) > 0$). Поэтому в силу условия $w_1|_\sigma = 0$ и принципа

максимума для гармонических функций получаем, что $w_1(x, y) \equiv 0$ в D_1 .

Заметим, что общее решение уравнения (1.43) имеет вид

$$w_2(x, y) = v_2(x, y) + \omega_1(x), \quad (1.45)$$

где $v_2(x, y)$ — общее решение уравнения

$$v_{2xx} + v_{2yy} = 0, \quad (1.46)$$

а $\omega_1(x)$ — частное решение уравнения (1.43).

В силу (1.45) задача (1.43), (1.44) сводится к задаче определения решения уравнения (1.46), удовлетворяющего граничным условиям

$$v_2|_{\sigma} = -\omega_1(x), \quad v_2|_{AB} = -\omega_1(x), \quad v_{2y}|_{AB} = 0. \quad (1.47)$$

Последнее условие из (1.47) показывает, что гармоническая функция на отрезке AB не достигает отличного от нуля экстремума. Согласно первым двум условиям (1.47) точка экстремума не может лежать и на кривой σ . Следовательно, $v_2(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$, поэтому также $\omega_1(x) \equiv 0$. На основании (1.45) получим, что $w_2 \equiv 0$. Таким образом, мы доказали, что задача (1.26), (1.38) имеет только тривиальное решение.

То, что при однородных условиях (1.28), (1.29) $u \equiv 0$ и в области D_2 , вытекает из условия $u|_{AB} = 0$ и формулы

$$u(x, y) = \Phi(x+y) - \Phi(-1),$$

дающей решение уравнения (1.27), удовлетворяющее однородным условиям (1.29).

Существование решения задачи (1.26), (1.37) доказывается сведением ее к интегральному уравнению Фредгольма для функции $\omega_1'(x)$ аналогично тому, как это сделано при решении задачи A_2 . После нахождения функции $\omega_1(x)$ функция $u_1(x, y)$ в области D_1 определяется полностью.

Обозначим $u_1(x, 0) \equiv u_2(x, 0) = \tau(x)$, где $\tau(x)$ — известная функция. Теперь построение решения задачи A_3 в области D_2 не представляет никакого труда. Оно выписывается в явном виде

$$u_2(x, y) = \tau(x+y) - \varphi\left(\frac{x+y-1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x-y-1}{2}\right) + \omega_2\left(\frac{x+y-1}{2}\right) - \omega_2\left(\frac{x-y-1}{2}\right) - \omega_2(x+y) + \omega_2(x).$$

Вопрос о нормальной разрешимости задачи A_3 с помощью преобразования Меллина изучен в работе [102].

§ 2. Новые постановки краевых задач для парабола-гиперболического уравнения третьего порядка

Поставим и исследуем ряд краевых задач с локальными и не-локальными граничными условиями для уравнения

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (Lu) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \begin{cases} u_{xx} - u_y & \text{в } D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

где области D_1 и D_2 определены в § 1 главы 1.

Уравнение $Lu=0$ в D_1 совпадает с уравнением теплопроводности

$$L_1 u \equiv u_{xx} - u_y = 0, \quad (2.2)$$

в D_2 — с гиперболическим уравнением

$$L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} = 0. \quad (2.3)$$

Заметим, что уравнение (2.1) в области D рассматривается при $y \neq 0$, поэтому в области D_1 — уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} (L_1 u) = 0, \quad (2.4)$$

в области D_2 —

$$\frac{\partial}{\partial y} (L_2 u) = 0. \quad (2.5)$$

В соответствии с этим примем обозначения

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) & \text{в } D_1, \\ u_2(x, y) & \text{в } D_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Для уравнения (2.1) в области D изучается следующая задача.

Задача B_1 . Найти регулярное в областях D_1 и D_2 решение $u(x, y)$ уравнения (2.1), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$, удовлетворяющее условиям склеивания на AB

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_2(x, 0), \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u_1(x, 0)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u_2(x, 0)}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

и граничным условиям

$$u_1|_{AA_0} = f_1(y), \quad u_1|_{BB_0} = f_2(y), \quad (2.8)$$

$$u_2|_{AC} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{AC} = \psi_1(x), \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{BC} = \psi_2(x), \quad (2.9)$$

где n — внутренняя нормаль; $f_1, f_2, \varphi, \psi_1, \psi_2$ — заданные гладкие функции, причем

$$f_1(0) = \varphi(0), \quad \psi_1' \left(\frac{1}{2} \right) = -\psi_2' \left(\frac{1}{2} \right).$$

Отметим, что любые регулярные решения уравнений (2.4) и (2.5) соответственно могут быть представлены в виде (см. [28], с. 55)

$$u_1(x, y) = v_1(x, y) + \omega_1(x), \quad (2.10)$$

$$u_2(x, y) = v_2(x, y) + \omega_2(x), \quad (2.11)$$

где v_1 и v_2 — регулярные решения уравнений (2.2) и (2.3); $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем они без ограничения общности могут быть подчинены условиям

$$\omega_i(0) = \omega_i(1) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.12)$$

Очевидно, что на отрезке AB наряду с условиями (2.7) выполняются и равенства

$$u_{1x} = u_{2x}, \quad u_{1xx} = u_{2xx}.$$

Подставляя общее решение

$$u_2(x, y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) + \omega_2(x)$$

уравнения (2.5) в условия (2.9), с учетом (2.12) находим

$$F_2(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \omega_2\left(\frac{x}{2}\right) - F_1(0), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\omega_2(x) = \sqrt{2} \int_0^x \psi_1(t) dt - c_1 x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\omega_2(x) = \sqrt{2} \int_x^1 \psi_2(t) dt + c_2(1-x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Функция $\omega_2(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируемой при $0 < x < 1$. Этим требованием полностью определяются постоянные c_1 и c_2 и тем самым сама функция $\omega_2(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \omega_2(x) &= V\sqrt{2} \int_0^x \psi_1(t) dt - \frac{x}{V\sqrt{2}} \left[\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \\ &\quad - x V\sqrt{2} \left[\int_0^{1/2} \psi_1(t) dt - \int_{1/2}^1 \psi_2(t) dt \right], \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \omega_2(x) &= V\sqrt{2} \int_x^1 \psi_2(t) dt + \frac{x-1}{V\sqrt{2}} \left[\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \\ &\quad + (1-x) V\sqrt{2} \left[\int_0^{1/2} \psi_1(t) dt - \int_{1/2}^1 \psi_2(t) dt \right], \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Итак, решение уравнения (2.5), удовлетворяющее условиям (2.9) в области D_2 , имеет вид

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= F_1(x+y) + \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) - \\ &\quad - \omega_2\left(\frac{x-y}{2}\right) + \omega_2(x) - F_1(0), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\omega_2(x)$ — уже известная функция. Отсюда при $y=0$ получаем

$$u_{2x} - u_{2y} = \varphi'\left(\frac{x}{2}\right) - \omega_2'\left(\frac{x}{2}\right) + \omega_2'(x). \quad (2.15)$$

Исходя из формул (2.10) и (2.11), находим, что при $y=0$ выполняются равенства

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1''(x), \quad u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_2''(x). \quad (2.16)$$

Так как в области D производная u_{yy} функции $u(x, y)$ непрерывна при переходе через отрезок AB , то из уравнения (2.4) при $y \rightarrow +0$ получаем

$$u_{1xy} = u_{1yy}. \quad (2.17)$$

Теперь, пользуясь условиями склеивания (2.7), из (2.16) и (2.17), будем иметь

$$u_2(x, 0) - u_{2y}(x, 0) = \omega_2(x) + ax + b, \quad (2.18)$$

где a, b — произвольные постоянные.

Из равенств (2.15) и (2.18) находим

$$u_{2x}(x, 0) - u_2(x, 0) = \alpha(x) - ax - b, \quad (2.19)$$

где $\alpha(x) = \varphi'\left(\frac{x}{2}\right) - \omega_2'\left(\frac{x}{2}\right) + \omega_2'(x) - \omega_2(x)$ — известная функция.

Решая уравнение (2.19) при условии $u_2(0, 0) = \varphi(0)$, получаем

$$u_2(x, 0) = \int_0^x \exp(x-t) \alpha(t) dt + \varphi(0) \exp(x) + \\ + a(1+x - \exp(x)) + b(1 - \exp(x)). \quad (2.20)$$

Постоянные a и b определяются из условий

$$u_2(1, 0) = f_2(0) \text{ и } u_{2x}(0, 0) + u_{2y}(0, 0) = \sqrt{2} \psi_1(0)$$

и равны

$$a = \frac{1}{e-2} \left[\int_0^1 \exp(1-t) \alpha(t) dt + \frac{e-1}{\sqrt{2}} \psi_1(0) + \right. \\ \left. + \varphi(0) - \frac{e-1}{2} \varphi'(0) - f_2(0) \right], \\ b = \frac{1}{2} \varphi'(0) + \varphi(0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(0).$$

Определяя производные $u_{2xx}(x, 0)$ и $u_{2y}(x, 0)$ из (2.20) и (2.18), пользуясь условиями склеивания, согласно первому из равенств (2.16) находим

$$\dot{\omega}_1(x) = u_{1xx}(x, 0) - u_{1y}(x, 0) = u_{2xx}(x, 0) - u_{2y}(x, 0) = \\ = \frac{1}{2} \varphi''\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \dot{\omega}_2\left(\frac{x}{2}\right) + \dot{\omega}_2(x) + \varphi'\left(\frac{x}{2}\right) - \dot{\omega}_2\left(\frac{x}{2}\right) - a$$

или

$$\omega_1(x) = 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - 2\omega_2\left(\frac{x}{2}\right) + \omega_2(x) + \\ + 2 \int_0^x \left[\varphi\left(\frac{t}{2}\right) - \omega_2\left(\frac{t}{2}\right) \right] dt - \varphi'(0)x - 2\varphi(0)(1+x) - \\ - \frac{a}{2}x^2 - 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + 2\omega_2\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \int_0^1 \left[\varphi\left(\frac{t}{2}\right) - \omega_2\left(\frac{t}{2}\right) \right] dt + \\ + \varphi'(0) + 4\varphi(0) + \frac{a}{2}. \quad (2.21)$$

Так как функции $u_1(x, 0) = u_2(x, 0)$ и $\omega_1(x)$ найдены [формулы (2.20) и (2.21)], то согласно (2.10) найдена и функция $v_1(x, 0)$:

$$v_1(x, 0) = u_1(x, 0) - \omega_1(x). \quad (2.22)$$

Граничные условия (2.8) в силу (2.10) и (2.12) относительно функции $v_1(x, y)$ перепишутся в виде

$$v_1|_{x=0} = f_1(y), \quad v_1|_{x=1} = f_2(y). \quad (2.23)$$

Теперь функция $v_1(x, y)$ в области D_1 находится как решение первой краевой задачи для уравнения (2.2) с крайевыми условиями (2.22), (2.23). Затем функция $u_1(x, y)$ в области D_1 определяется по формуле (2.10).

Неизвестная функция $F_1(x+y)$ в формуле (2.14) находится из условия $u_2(x, 0) = \tau(x)$, где $\tau(x)$ — правая часть равенства (2.20). В результате функция $u_2(x, y)$ в области D_2 определяется полностью формулой

$$u_2(x, y) = \tau(x+y) - \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) + \\ + \omega_2\left(\frac{x+y}{2}\right) - \omega_2\left(\frac{x-y}{2}\right) - \omega_2(x+y) + \omega_2(x). \quad (2.24)$$

Построенное решение задачи B_1 единственно. В самом деле, как показывает формула (2.13) для $\omega_2(x)$ при условиях однородной задачи B_1 , имеем $\omega_1(x) \equiv \omega_2(x) \equiv 0$. Тогда из формул (2.20) и (2.24) следует, что $u_2(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_2$. В этом случае, так как $u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0$ и $\omega_1(x) = 0$, условия (2.22) и (2.23) станут однородными и получим, что $v_1(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$. Следовательно, и $u_1(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$, что и требовалось доказать.

Аналогичным путем может быть решена следующая задача.

Задача B_2 . Требуется определить регулярное в областях D_1 и D_2 решение $u(x, y)$ уравнения (2.1), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$, удовлетворяющее условиям склеивания (2.7) и граничным условиям

$$u_1|_{AA_0} = f_1(y), \quad u_1|_{BB_0} = f_2(y), \quad u_1|_{A_0B_0} = \psi(x), \quad u_2|_{AC} = \varphi(x);$$

здесь предполагается, что заданные функции f_1, f_2, ψ, φ непрерывны и $f_1(h) = \psi(0)$, $f_2(h) = \psi(1)$, $f_1(0) = \varphi(0)$.

Следует отметить, что задача B_1 только с первыми двумя условиями склеивания (2.7) и в предположении, что в обоих представлениях (2.10) и (2.11) участвует одна и та же произвольная функция $\omega(x)$, рассмотрена в [39].

Задача B_3 . Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся регулярным решением уравнения (2.1) в областях D_i ($i=1, 2$), непрерывную в $\bar{D}$, удовлетворяющую граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} f_1(y) u_x(0, y) + g_1(y) u(0, y) &= \varphi_1(y), \\ f_2(y) u_x(1, y) + g_2(y) u(1, y) &= \varphi_2(y), \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

$$a(x) \frac{d}{dx} u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + b(x) \frac{d}{dx} u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = c(x);$$

$$x \in J = \overline{AB}, \quad (2.26)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BC} = \psi_2(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad (2.27)$$

и условиям склеивания

$$\left. \begin{aligned} u(x, -0) &= u(x, +0) = \tau(x), \\ u_y(x, -0) &= u_y(x, +0) = \nu(x), \\ u_{yy}(x, -0) &= u_{yy}(x, +0) = \mu(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

где n — внутренняя нормаль, $f_1, f_2, g_1, g_2, \varphi_1, \varphi_2, a, b, c, \psi_1, \psi_2$ — заданные гладкие функции, причем

$$\begin{aligned} f_i^2(y) + g_i^2(y) &\neq 0, \quad i = 1, 2, \\ f_1(y) g_1(y) &\leq 0, \quad f_2(y) g_2(y) \geq 0, \quad 0 \leq y \leq h, \\ f_1(0) \tau'(0) + g_1(0) \tau(0) &= \varphi_1(0), \quad g_1(0) \neq 0, \\ f_2(0) \tau'(1) + g_2(0) \tau(1) &= \varphi_2(0), \\ a^2(x) + b^2(x) &\neq 0 \quad \forall x \in \bar{J}, \quad a(0) \neq 0, \\ \psi_1'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\psi_2'\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Переходя к решению задачи B_3 , заметим, что и здесь произвольная функция $\omega_2(x)$, входящая в представление (2.11) общего решения уравнения (2.1), в области D_2 определяется формулой (2.13).

Нетрудно убедиться, что решение (2.11), удовлетворяющее условиям

$$u_2(x, 0) = \tau(x), \quad u_{2y}(x, 0) = \nu(x),$$

имеет вид

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu(t) dt - \\ &\quad - \frac{\omega_2(x+y) + \omega_2(x-y)}{2} + \omega_2(x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Подставляя (2.29) в условие (2.26), будем иметь функциональное соотношение, принесенное из области D_2 :

$$[a(x) + b(x)] \tau'(x) - [a(x) - b(x)] \nu(x) = c_1(x), \quad (2.30)$$

где

$$c_1(x) = 2c(x) + [a(x) + b(x)] \omega_2'(x) - \\ - a(x) \omega_2' \left(\frac{x}{2} \right) - b(x) \omega_2' \left(\frac{x+1}{2} \right).$$

Из представлений (2.10) и (2.11) получаем

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1''(x), \\ u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_2''(x).$$

Отсюда, устремляя y к нулю, находим

$$\tau''(x) - \nu(x) = \omega_1''(x), \quad (2.31)$$

$$\tau''(x) - \mu(x) = \omega_2''(x). \quad (2.32)$$

Так как в области D производная u_{yy} непрерывна при переходе через отрезок AB , из уравнения (2.1) при $y \rightarrow +0$ получим

$$\nu''(x) - \mu(x) = 0. \quad (2.33)$$

Исключая из соотношений (2.32) и (2.33) функцию $\mu(x)$, будем иметь

$$\tau''(x) - \nu''(x) = \omega_2''(x)$$

или

$$\tau(x) - \nu(x) = \omega_2(x) + \alpha x + \beta, \quad (2.34)$$

где α и β — произвольные постоянные.

Пусть $a^2(x) \equiv b^2(x)$. Тогда, если $a(x) \equiv b(x)$ ($a(x) \equiv -b(x)$), из (2.30) сразу можно определить $\tau(x)$ ($\nu(x)$). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $a(x) \neq \pm b(x)$, $\forall x \in \bar{J}$. Тогда, исключая из (2.30) и (2.34) функцию $\nu(x)$, приходим к задаче

$$\left. \begin{aligned} \tau'(x) - p(x) \tau(x) &= c_2(x) - p(x) (\alpha x + \beta), \\ f_1(0) \tau'(0) + g_1(0) \tau(0) &= \varphi_1(0), \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

где

$$p(x) = \frac{a(x) - b(x)}{a(x) + b(x)}; \\ c_2(x) = \frac{c_1(x)}{a(x) + b(x)} - p(x) \omega_2(x).$$

Решение задачи (2.35) имеет вид

$$\tau(x) = \frac{\varphi_1(0) - f_1(0) [c_2(0) - p(0)\beta]}{g_1(0) + p(0)f_1(0)} \exp\left(\int_0^x p(t) dt\right) + \\ + \int_0^x [c_2(t) - p(t)(\alpha t + \beta)] \exp\left(\int_0^x p(z) dz - \int_0^t p(s) ds\right) dt,$$

где α и β определяются из условий

$$f_2(0)\tau'(1) + g_2(0)\tau(1) = \dot{\phi}_2(0), \quad \tau'(0) + v(0) = \sqrt{2}\psi_1(0)$$

и равны

$$\alpha = \left\{ f_2(0)p(1) + [f_2(0)p(1) + g_2(0)] \int_0^1 tp(t) \exp\left(\int_0^1 p(z) dz - \int_0^t p(s) ds\right) dt \right\}^{-1} \left\{ f_2(0)c_2(1) - \varphi_2(0) + \right. \\ + \frac{[\varphi_1(0) - f_1(0)c_2(0)] [f_2(0)p(1) + g_2(0)]}{f_1(0)p(0) + g_1(0)} \exp\left(\int_0^1 p(t) dt\right) + \\ + [f_2(0)p(1) + g_2(0)] \int_0^1 c_2(t) \exp\left(\int_0^1 p(z) dz - \int_0^t p(s) ds\right) dt + \\ + \beta \left[\frac{p(0) [f_2(0)p(1) + g_2(0)] f_1(0)}{f_1(0)p(0) + g_1(0)} \exp\left(\int_0^1 p(t) dt\right) - f_2(0)p(1) - \right. \\ \left. - [f_2(0)p(1) + g_2(0)] \int_0^1 p(t) \exp\left(\int_0^1 p(z) dz - \int_0^t p(s) ds\right) dt \right] \Big\}, \\ \beta = \frac{[c_2(0) - \sqrt{2}\psi_1(0)] [f_1(0)p(0) + g_1(0)] + [\varphi_1(0) - f_1(0)c_2(0)] [1 + p(0)]}{[1 + p(0)] g_1(0)}.$$

Затем из (2.34) находим $v(x)$. Таким образом, мы приходим к следующей вспомогательной задаче: найти регулярное в области D_1 решение уравнения (2.1), непрерывное в замкнутой области D_1 и удовлетворяющее граничным условиям (2.25) и

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = v(x). \quad (2.36)$$

Отметим, что в случае $f_i(y) \equiv 0$, $g_i(y) \equiv 1$, $i = 1, 2$ эта задача совпадает с задачей P , изученной в работе [28, с. 55], а в случае $f_i(y) \equiv 1$, $g_i(y) \equiv 0$, $i = 1, 2$ — с задачей P^* [28, с. 90]. Для доказательства единственности решения этой задачи рассмотрим однородные граничные условия

$$\left. \begin{aligned} f_1(y) u_x(0, y) + g_1(y) u(0, y) &= 0, \\ f_2(y) u_x(1, y) + g_2(y) u(1, y) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0. \quad (2.38)$$

Из представления (2.10) решения уравнения (2.1) в области D_1 получаем

$$u_{xx} - u_y = \omega_1''(x). \quad (2.39)$$

Отсюда в силу условий (2.38) и (2.12) ($i=1$) имеем $\omega_1(x) \equiv 0$. Тогда из (2.39) следует, что $u_{xx} - u_y = 0$.

Интегрируя тождество

$$u(u_{xx} - u_y) = (uu_x)_x - \left(\frac{1}{2}u^2\right)_y - u_x^2 \equiv 0 \quad (2.40)$$

по области D_1 и используя граничные условия (2.37), получаем

$$\begin{aligned} & \iint_{D_1} u_x^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, h) dx + \\ & + \int_0^h \left[-\frac{g_1(y)}{f_1(y)} \right] u^2(0, y) dy + \int_0^h \frac{g_2(y)}{f_2(y)} u^2(1, y) dy \equiv 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \iint_{D_1} u_x^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, h) dx + \\ & + \int_0^h \left[-\frac{f_1(y)}{g_1(y)} \right] u_x^2(0, y) dy + \int_0^h \frac{f_2(y)}{g_2(y)} u_x^2(1, y) dy \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условий, наложенных на функции $f_i(y)$ и $g_i(y)$ ($i=1, 2$), в постановке задачи B_3 следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$. Единственность решения этой задачи при тех же условиях можно было доказать и принципом максимума для параболических уравнений.

Для доказательства существования решения задачи (2.1), (2.25), (2.36), как и в [28], продолжим заданные функции $\tau(x)$ и $v(x)$ по непрерывности на отрезке $[x_0, x_1]$, где $x_0 < 0$, $x_1 > 1$. Так как функция

$$u_0(x, y) = \tau(x) - \int_{x_0}^{x_1} (x - \xi) v(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x_1} V(x, y; \xi, 0) v(\xi) d\xi,$$

где

$$V(x, y; \xi, \eta) = 2\sqrt{y - \eta} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4(y - \eta)}\right] + \\ + (x - \xi) \int_{-\infty}^{\frac{x - \xi}{\sqrt{y - \eta}}} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt, \quad y > \eta,$$

в области D_1 удовлетворяет уравнению (2.1) и условиям

$$u_0(x, 0) = \tau(x), \quad u_{0y}(x, 0) = v(x),$$

то, полагая

$$u(x, y) = v(x, y) + u_0(x, y),$$

для функции $v(x, y)$ получим задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (v_{xx} - v_y) &= 0, \\ f_1(y) v_x(0, y) + g_1(y) v(0, y) &= \bar{\varphi}_1(y), \\ f_2(y) v_x(1, y) + g_2(y) v(1, y) &= \bar{\varphi}_2(y), \\ v(x, 0) &= 0, \quad v_y(x, 0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

где

$$\bar{\varphi}_1(y) = \varphi_1(y) - f_1(y) u_{0x}(0, y) - g_1(y) u_0(0, y), \\ \bar{\varphi}_2(y) = \varphi_2(y) - f_2(y) u_{0x}(1, y) - g_2(y) u_0(1, y).$$

Пусть $f_i(y) \neq 0$, $i = 1, 2$ (Остальные случаи изучаются аналогично). Решение задачи (2.41) будем искать в виде

$$v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \left[\frac{1}{\sqrt{y - \eta}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(y - \eta)}\right) \theta_1(\eta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{y - \eta}} \exp\left[-\frac{(x - 1)^2}{4(y - \eta)}\right] \theta_2(\eta) \right] d\eta, \quad (2.42)$$

где $\theta_1(y)$ и $\theta_2(y)$ — произвольные непрерывные функции.

Подставляя (2.42) в первые два условия задачи (2.41), получаем

$$\left. \begin{aligned} f_1(y) \theta_1(y) - \frac{g_1(y)}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\theta_1(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta - \\ - \frac{f_1(y)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\theta_2(\eta)}{(y-\eta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(y-\eta)}\right) d\eta - \\ - \frac{g_1(y)}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\theta_2(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} \exp\left[-\frac{1}{4(y-\eta)}\right] d\eta = -\bar{\varphi}_1(y), \\ f_2(y) \theta_2(y) - \frac{f_2(y)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\theta_1(\eta)}{(y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4(y-\eta)}\right] d\eta + \\ + \frac{g_2(y)}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\theta_1(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} \exp\left[-\frac{1}{4(y-\eta)}\right] d\eta + \frac{g_2(y)}{\sqrt{\pi}} \times \\ \times \int_0^y \frac{\theta_2(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = \bar{\varphi}_2(y). \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Эти уравнения представляют собой систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\theta_1(y)$ и $\theta_2(y)$, ядра которых имеют слабые особенности, а правые части непрерывны. Следовательно, система уравнений (2.43) допускает единственное решение.

Задача B_4 . От задачи B_3 отличается тем, что вместо условий (2.25) и (2.26) берутся соответственно условия

$$\left. \begin{aligned} f_1(y) u(0, y) + g_1(y) u(1, y) &= \varphi_1(y), \\ f_2(y) u_x(0, y) + g_2(y) u_x(1, y) &= \varphi_2(y), \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} a(x) u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + b(x) u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \\ = c(x), \quad x \in \bar{J}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где

$$f_i^2(y) + g_i^2(y) \neq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$f_1(y) f_2(y) = g_1(y) g_2(y),$$

$$a^2(x) + b^2(x) \neq 0,$$

$$q = a(0)a(1)g_1(0) + f_1(0)b(0)b(1) \neq 0.$$

Как и в задаче B_1 , в силу условий (2.27) полностью определим функцию $\omega_2(x)$. Далее при удовлетворении общего решения (2.11) условию $u_y(x, 0) = v(x)$ будем иметь

$$u(x, y) = F_2(x+y) + F_2(x-y) + \int_0^{x+y} v(t) dt + \omega_2(x) - F_2(0). \quad (2.46)$$

При выполнении условия

$$a(x) + b(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (2.47)$$

и удовлетворении (2.46) краевому условию (2.45) получим

$$F_2(x) = -\frac{b(x)}{a(x) + b(x)} \int_0^x v(t) dt + c_1(x), \quad (2.48)$$

где

$$\begin{aligned} c_1(x) = & \frac{c(x) - a(x)\omega_2\left(\frac{x}{2}\right) - b(x)\omega_2\left(\frac{x+1}{2}\right)}{a(x) + b(x)} - \\ & - \frac{b(x)}{a(x) + b(x)} [F_2(1) - F_2(0)], \\ F_2(1) = & \frac{1}{qa(1)} [a(1)b(1)c(0)f_1(0) - a(0)a(1)b(1)\varphi_1(0) - \\ & - b(0)b(1)c(1)f_1(0)] + \frac{c(1)}{a(1)}, \\ F_2(0) = & \frac{a(1)c(0)g_1(0) - b(0)c(1)g_1(0) + b(0)b(1)\varphi_1(0)}{q} = q_1. \end{aligned}$$

Тогда общее решение (2.46), удовлетворяющее краевому условию (2.45), имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{a(x+y)}{a(x+y) + b(x+y)} \int_0^{x+y} v(t) dt - \frac{b(x-y)}{a(x-y) + b(x-y)} \times \\ & \times \int_0^{x-y} v(t) dt + c_1(x+y) + c_1(x-y) + \omega_2(x) - q_1. \quad (2.49) \end{aligned}$$

Полагая в (2.49) $y=0$, получаем функциональное соотношение

$$\tau(x) = \frac{a(x) - b(x)}{a(x) + b(x)} \int_0^x v(t) dt + 2c_1(x) + \omega_2(x) - q_1. \quad (2.50)$$

Если $a(x) \equiv b(x)$, то из (2.50) сразу находим $\tau(x) = 2c_1(x) + \omega_2(x) - q_1$, и решение задачи не представляет особого труда. Поэтому будем считать, что $a(x) \neq b(x)$, $\forall x \in \bar{J}$.

Другое функциональное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v(x)$, как и в задаче B_3 , получаем в виде (2.34).

Исключая из (2.50) и (2.34) функцию $v(x)$, приходим к задаче

$$\begin{aligned} \tau'(x) - p_1(x) \tau(x) &= c_2(x) - p(x)(\alpha x + \beta), \\ \tau(0) &= q_1, \end{aligned}$$

где

$$p(x) = \frac{a(x) - b(x)}{a(x) + b(x)},$$

$$p_1(x) = \frac{(a-b)^2 + 2(a'b - ab')}{a^2 - b^2},$$

$$c_2(x) = p(x) \left[\frac{d}{dx} \{ p(x) [2c_1(x) + \omega_2(x) - q_1] \} - \omega_2(x) \right],$$

решение которого имеет вид

$$\tau(x) = A(x)\alpha + B(x)\beta + C(x).$$

Здесь

$$A(x) = - \int_0^x t p(t) \exp \left(\int_0^x p_1(s) ds - \int_0^t p_1(s) ds \right) dt,$$

$$B(x) = - \int_0^x p(t) \exp \left(\int_0^x p_1(s) ds - \int_0^t p_1(s) ds \right) dt,$$

$$C(x) = \left(q_1 + \int_0^x c_2(t) \exp \left(- \int_0^t p_1(s) ds \right) dt \right) \exp \left(\int_0^x p_1(t) dt \right).$$

Постоянные α и β определяются из условий

$$\tau(1) = \frac{1}{q} [b(0)c(1)f_1(0) + a(0)a(1)\varphi_1(0) - a(1)c(0)f_1(0)] = q_2,$$

$$f_2(0)\tau'(0) + g_2(0)\tau'(1) = \varphi_2(0),$$

т. е.

$$\alpha = \frac{1}{q_3} [q_2 f_2(0) B'(0) + q_2 g_2(0) B'(1) - \varphi_2(0) B(1) +$$

$$+ f_2(0) C'(0) B(1) + g_2(0) C'(1) B(1) - f_2(0) C(1) B'(0) - \\ - g_2(0) C(1) B'(1)], \beta = \frac{1}{q_3} [\varphi_2(0) A(1) - f_2(0) A(1) C'(0) - \\ - g_2(0) A(1) C'(1) - q_2 g_2(0) A'(1) + g_2(0) C(1) A'(1)],$$

если

$$q_3 = f_2(0) A(1) B'(0) + g_2(0) A(1) B'(1) - g_2(0) A'(1) B(1) \neq 0.$$

После определения $v(x)$ из (2.34), рассуждая как и в задаче (2.1), (2.25), (2.36), в силу условий (2.38) убедимся, что $\omega_1(x) \equiv 0$. Поэтому остается доказать, что задача

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} - u_y &= 0, \\ f_1(y) u(0, y) + g_1(y) u(1, y) &= 0, \\ f_2(y) u_x(0, y) + g_2(y) u_x(1, y) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

имеет только тривиальное решение. Интегрируя тождество (2.40) и пользуясь однородными условиями задачи (2.51), имеем

$$\iint_{D_1} u_x^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, h) dx = \\ = \int_0^h \left[\frac{f_1(y) f_2(y)}{g_1(y) g_2(y)} - 1 \right] u(0, y) u_x(0, y) dy.$$

Отсюда в силу условия, указанного в постановке задачи B_3 , относительно функций $f_i(y)$ и $g_i(y)$ ($i = 1, 2$) получаем

$$\iint_{D_1} u_x^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, h) dx \equiv 0,$$

из которого следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$.

Перейдем к доказательству существования решения вспомогательной задачи (2.1), (2.44), (2.36). Решение этой задачи ищем в виде $u(x, y) = v(x, y) + u_0(x, y)$, где $u_0(x, y)$ определена выше, и относительно $v(x, y)$ получим задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (v_{xx} - v_y) &= 0, \\ f_1(y) v(0, y) + g_1(y) v(1, y) &= \bar{\varphi}_1(y), \\ f_2(y) v_x(0, y) + g_2(y) v_x(1, y) &= \bar{\varphi}_2(y), \\ v(x, 0) = 0, \quad v_y(x, 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(y) &= \varphi_1(y) - f_1(y) u_0(0, y) - g_1(y) u_0(1, y), \\ \bar{\varphi}_2(y) &= \varphi_2(y) - f_2(y) u_{0x}(0, y) - g_2(y) u_{0x}(1, y). \end{aligned}$$

Решение задачи (2.52) ищем в виде (2.42). Подставляя (2.42) в первые два условия задачи (2.52), имеем систему интегральных уравнений Вольтерра:

$$\begin{aligned} & \frac{f_1(y)}{V\pi} \int_0^y \frac{\theta_1(\eta)}{V y - \eta} d\eta + \frac{f_1(y)}{V\pi} \int_0^y \frac{1}{V y - \eta} \exp \left[-\frac{1}{4(y-\eta)} \right] \theta_2(\eta) d\eta + \\ & + \frac{g_1(y)}{V\pi} \int_0^y \frac{1}{V y - \eta} \exp \left[-\frac{1}{4(y-\eta)} \right] \theta_1(\eta) d\eta + \\ & + \frac{g_1(y)}{V\pi} \int_0^y \frac{\theta_2(\eta)}{V y - \eta} d\eta = \bar{\varphi}_1(y), \\ & f_2(y) \theta_1(y) - g_2(y) \theta_2(y) - \\ & - \frac{f_2(y)}{V\pi} \int_0^y \frac{1}{V y - \eta^{3/2}} \exp \left[-\frac{1}{4(y-\eta)} \right] \theta_1(\eta) d\eta + \\ & + \frac{g_2(y)}{2V\pi} \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{3/2}} \exp \left[-\frac{1}{4(y-\eta)} \right] \theta_1(\eta) d\eta = -\bar{\varphi}_2(y), \end{aligned}$$

которая также допускает единственное решение. Тем самым однозначная разрешимость задачи (2.1), (2.44), (2.36) полностью доказана.

Замечание 2.1. Задачи типа B_i ($i=1, 2, 3, 4$) могут быть изучены для уравнений параболо-гиперболического типа третьего порядка с нехарактеристической линией изменения типа, т. е. в тех случаях, когда области D_1 и D_2 стыкуются по отрезку AA_0 прямой $x=0$, являющейся нехарактеристической линией для уравнения (2.1).

§ 3. Краевые задачи со смещением для одного парабола-гиперболического уравнения третьего порядка

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_y) & \text{в } D_1, \\ \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_{yy}) & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

где области D_1 и D_2 определены в § 1 главы 1. Пусть

$$\theta_0(x) = \frac{x}{2} - i \frac{x}{2}, \quad \theta_1(x) = \frac{x+1}{2} + i \frac{x-1}{2}$$

— точки пересечения характеристик уравнения (3.1), выходящих из точки $x \in AB = J$, с характеристиками AC и BC соответственно.
Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$, которая:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{D}_i) \cap C^1(D_i \cup [0, 1))$, $i = 1, 2$;
- 2) является регулярным решением уравнения (3.1) в D_i ($i = 1, 2$);
- 3) удовлетворяет условиям

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad u_x|_{x=0} = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & a(x) \frac{d}{dx} u[\theta_0(x)] + b(x) \frac{d}{dx} u[\theta_1(x)] = \\ & = c(x) u(x, -0) + d(x) u_y(x, -0) + e(x), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad (3.4)$$

4) для которой выполняются условия склеивания

$$\begin{cases} u(x, -0) = \alpha(x) u(x, +0) + \gamma(x), \\ u_y(x, -0) = \beta(x) u_y(x, +0) + \delta(x) u(x, +0) + \zeta(x), \end{cases} \quad (3.5)$$

где n — внутренняя нормаль; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi, a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta$ — заданные функции, причем $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi, a', b', c', d', e', \alpha', \beta', \gamma', \delta', \zeta'$ непрерывны; $\alpha\beta \neq 0, \forall x \in \bar{J}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0, \forall x \in \bar{J}$.

Пусть

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

Любое регулярное решение уравнения (3.1) в D при $y \neq 0$ представимо в виде [28]

$$u_i(x, y) = v_i(x, y) + \omega_i(y), \quad i = 1, 2; \quad (3.6)$$

здесь $v_i(x, y)$ — регулярные решения уравнений

$$v_{1xx} - v_{1y} = 0, \quad (3.7)$$

$$v_{2xx} - v_{2yy} = 0; \quad (3.8)$$

$\omega_1(y)$ — один раз, $\omega_2(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем без ограничения общности можно считать, что

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_2'(0) = 0. \quad (3.9)$$

Примем следующие обозначения:

$$u_1(x, 0) = \tau_1(x), \quad u_{1y}(x, 0) = \nu_1(x), \quad (3.10)$$

$$u_2(x, 0) = \tau_2(x), \quad u_{2y}(x, 0) = \nu_2(x). \quad (3.11)$$

Пользуясь общим представлением

$$u_2(x, y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) + \omega_2(y)$$

решения уравнения (3.1) в D_2 и условием (3.4), а также учитывая (3.9), находим

$$\omega_2(y) = -\sqrt{2} \int_0^{-y} \psi(t) dt - \sqrt{2} \psi(0) y, \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq 0. \quad (3.12)$$

Тогда решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям (3.4) и (3.11), имеет вид

$$u_2(x, y) = \frac{\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu_2(t) dt + \omega_2(y). \quad (3.13)$$

Отсюда в силу условия (3.3) находим соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\begin{aligned} [a(x) + b(x)] \tau_2'(x) - 2c(x) \tau_2(x) = \\ = [a(x) - b(x) + 2d(x)] \nu_2(x) + p(x), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$p(x) = 2e(x) + a(x) \omega_2' \left(-\frac{x}{2} \right) - b(x) \omega_2' \left(\frac{x-1}{2} \right).$$

Непосредственно из представления (3.6) при $i=1$, устремляя y к нулю, получаем соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) = k, \quad (3.15)$$

где k — неизвестная константа, подлежащая определению.

Пусть $a(x) - b(x) + 2d(x) \neq 0$, $\forall x \in AB$. Исключая из уравнений (3.14), (3.15) функции $\tau_2(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ с помощью условия склеивания (3.5), получаем для определения $\tau_1(x)$ задачу

$$\tau_2''(x) + m(x) \tau_1'(x) + n(x) \tau_1(x) = k + p_1(x), \quad (3.16)$$

$$\tau_1(0) = \varphi_1(0), \quad \tau_1'(0) = \varphi_3(0), \quad \tau_1(1) = \varphi_2(0), \quad (3.17)$$

где

$$m(x) = \frac{\alpha(x) [a(x) + b(x)]}{\beta(x) [b(x) - a(x) - 2d(x)]},$$

$$\begin{aligned} n(x) = & \{[\alpha'(x) - \delta(x)] a(x) + [\alpha'(x) + \delta(x)] b(x) - 2\alpha(x) c(x) - \\ & - 2\delta(x) d(x)\} \{\beta(x) [b(x) - a(x) - 2d(x)]\}^{-1}, \\ p_1(x) = & \{p(x) - \gamma'(x) [a(x) + b(x)] + 2\gamma(x) c(x) + \\ & + [a(x) - b(x) + 2d(x)] \zeta(x)\} \{\beta(x) [b(x) - a(x) - 2d(x)]\}^{-1}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что решение уравнения (3.16), удовлетворяющее первым двум условиям (3.17), может быть эквивалентным образом сведено к интегральному уравнению Вольтерра второго рода [12]:

$$\tau_1(x) - \int_0^x K(x, t) \tau_1(t) dt = \frac{x^2}{2} k + p_2(x), \quad (3.18)$$

где

$$K(x, t) = -m(t) + (x - t) [m'(t) - n(t)],$$

$$p_2(x) = \varphi_1(0) + [\varphi_3(0) + m(0) \varphi_1(0)] x + \int_0^x (x - t) p_1(t) dt.$$

Решение интегрального уравнения (3.18) представим в виде

$$\tau_1(x) = \left(x^2 + \int_0^x R(x, t) t^2 dt \right) \frac{k}{2} + p_2(x) + \int_0^x R(x, t) p_2(t) dt, \quad (3.19)$$

где $R(x, t)$ — резольвента ядра $K(x, t)$. Отсюда в силу условия $\tau_1(1) = \varphi_2(0)$ определим

$$k = \frac{2}{\rho} \left[\varphi_2(0) - p_2(1) - \int_0^1 R(1, t) p_2(t) dt \right]$$

при

$$\rho = 1 + \int_0^1 R(1, t) t^2 dt \neq 0. \quad (3.20)$$

После определения функций $v_1(x)$, $\tau_2(x)$ и $v_2(x)$ из (3.15) и (3.5) решение задачи 1 в области D_2 находим по формуле (3.13), а в области D_1 приходим к задаче (3.1), (3.2) и $u_1(x+0) = \tau_1(x)$, где функция $\tau_1(x)$ определена по формуле (3.19). Эта задача представляет собой задачу A , исследованную в работе [28] (см. гл. IV). В дальнейшем неоднократно будем ссылаться на задачу A .

Единственность решения задачи 1 следует из единственности решения задачи A и из того, что в случае однородной задачи 1 $\omega_2(y) = 0$ [см. (3.12)], а также из единственности решения задачи Коши для уравнения (3.8).

Если $a(x) - b(x) + 2d(x) \equiv 0$, то из (3.14) имеем

$$[a(x) + d(x)] \tau_2'(x) - c(x) \tau_2(x) = \frac{1}{2} p(x).$$

Отсюда при выполнении условия $a(x) + d(x) \neq 0$ с учетом $\tau_2(0) = \alpha(0) \varphi_1(0) + \gamma(0)$ однозначно определяем $\tau_2(x)$. Затем из (3.5) и (3.15) находим функции $\tau_1(x)$, $v_1(x)$ и $v_2(x)$. Итак, решение задачи 1 в области D_2 определяется по формуле (3.13), в области D_1 — как решение задачи A .

Задача 2. От задачи 1 отличается тем, что вместо условия (3.3) берется условие

$$a(x) u[\theta_0(x)] + b(x) u[\theta_1(x)] = c(x) u(x, -0) + e(x), \quad (3.21)$$

где заданные функции φ_1 , φ_2 , a , b , c , e , α , γ связаны условием согласованности

$$[a(0) - c(0)] [\alpha(0) \varphi_1(0) + \gamma(0)] + \\ + \frac{b(0)}{a(1)} \{ [c(1) - b(1)] [\alpha(1) \varphi_2(0) + \gamma(1)] + e(1) \} = e(0), \quad a(1) \neq 0.$$

После определения $\omega_2(y)$ с помощью условия (3.4), как и в работе [64], в области D_2 представим решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условию $u_{2y}(x, 0) = v_2(x)$, в виде

$$u_2(x, y) = F_2(x+y) + F_2(x-y) + \int_0^{x+y} v_2(t) dt + \omega_2(y) - F_2(0).$$

Пусть $a(t) + b(t) - 2c(t) \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Реализуя условие (3.21), находим

$$u_2(x, y) = \frac{a(x+y) - c(x+y)}{a(x+y) + b(x+y) - 2c(x+y)} \int_0^{x+y} v_2(t) dt + \\ + \frac{c(x-y) - b(x-y)}{a(x-y) + b(x-y) - 2c(x-y)} \int_0^{x-y} v_2(t) dt + Q(x, y). \quad (3.22)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 Q(x, y) = & \omega_2(y) - \alpha(0) \varphi_1(0) - \gamma(0) - \\
 & - \frac{c(x+y) [\alpha(0) \varphi_1(0) + \gamma(0)] + b(x+y) k_0 - e(x+y)}{a(x+y) + b(x+y) - 2c(x+y)} - \\
 & - \frac{a(x+y) \omega_2\left(-\frac{x+y}{2}\right) + b(x+y) \omega_2\left(\frac{x+y-1}{2}\right)}{a(x+y) + b(x+y) - 2c(x+y)} - \\
 & - \frac{c(x-y) [\alpha(0) \varphi_1(0) + \gamma(0)] + b(x-y) k_0 - e(x-y)}{a(x-y) + b(x-y) - 2c(x-y)} - \\
 & - \frac{a(x-y) \omega_2\left(\frac{y-x}{2}\right) + b(x-y) \omega_2\left(\frac{x-y-1}{2}\right)}{a(x-y) + b(x-y) - 2c(x-y)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_0 = & \frac{1}{a(1)} \{ [c(1) - b(1)] [\alpha(1) \varphi_2(0) + \gamma(1)] + e(1) \} - \\
 & - \omega_2\left(-\frac{1}{2}\right) - \alpha(0) \varphi_1(0) - \gamma(0).
 \end{aligned}$$

Полагая в (3.22) $y=0$, получаем

$$\tau_2(x) = \frac{a(x) - b(x)}{a(x) + b(x) - 2c(x)} \int_0^x v_2(t) dt + Q(x, 0). \quad (3.23)$$

Если $a(x) \equiv b(x)$, то из соотношения (3.23) сразу находим $\tau_2(x) = Q(x, 0)$, и решение задачи 2 в этом случае не представляет особого труда. Поэтому будем считать, что $a(x) \neq b(x)$.

Из области D_1 при $y \rightarrow +0$ получается соотношение (3.15). Исключая из (3.5), (3.15) и (3.23) функции $\tau_2(x)$, $v_2(x)$ и $v_1(x)$, для определения $\tau_1(x)$ опять приходим к задаче (3.16), (3.17), при этом коэффициенты и правая часть уравнения (3.16) соответствующим образом определяются через данные задачи 2.

Единственность решения задачи 2 устанавливается так же, как и единственность решения задачи 1.

Задача 3 (вспомогательная). Определить регулярное в области D_1 решение уравнения (3.1), непрерывное в замкнутой области D_1 и удовлетворяющее условиям

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \\ u(1, y) - u(x_0, y) = \varphi_3(y), \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

$$u(x, 0) = \tau_2(x), \quad (3.25)$$

где $0 \leq x_0 < 1$ и $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \tau_1$ — заданные функции, причем $\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$ и τ_1' непрерывны и $\varphi_1(0) = \tau_1(0)$. Отметим, что задача относится к числу задач, предложенным в [15].

Единственность решения задачи 3 следует из представления (3.6) ($i=1$) и принципа экстремума для уравнения (3.7). В самом деле, однородная задача 3 в силу представления (3.6) ($i=1$) и на основании (3.9) эквивалентно редуцируется к задаче нахождения регулярного в области D_1 решения уравнения (3.7), удовлетворяющего условиям

$$\left. \begin{aligned} v_1(0, y) &= -\omega_1(y), \quad v_{1x}(0, y) = 0 \\ v_1(1, y) - v_1(x_0, y) &= 7, \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

$$v_1(x, 0) = 0. \quad (3.27)$$

Как известно, по принципу экстремума для уравнения теплопроводности функция $v_1(x, y)$ не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума внутри области D_1 и при $y=h$. В силу условия (3.27) функция $v_1(x, y)$ не имеет отличного от нуля экстремума при $y=0$. Пусть положительный максимум (отрицательный минимум) достигается в некоторой точке отрезка $0 < y \leq h$ при $x=0$. Тогда по известной теореме [51] в этой точке $v_{1x} < 0$ ($v_{1x} > 0$), что противоречит второму условию (3.26). Функция $v_1(x, y)$ положительного максимума и отрицательного минимума не может достигать и в точках отрезка $0 < y \leq h$ при $x=1$, так как в виду последнего условия из (3.26) эти же экстремальные значения должны повторяться и внутри области D_1 или при $x=0$, что невозможно. Поэтому $v_1(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$, стало быть $\omega_1(y) \equiv 0$ в $0 \leq y \leq h$. Следовательно, $v_1(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$.

Для доказательства существования решения задачи 3 продолжим функцию $\tau_1(x)$ из $0 \leq x \leq 1$ в $(-\infty, +\infty)$ по непрерывности. Заметим, что функция

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \varphi_1(y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(\xi) \left\{ \frac{1}{\sqrt{y}} \exp \left[-\frac{(\xi-x)^2}{4y} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{y}} \exp \left(-\frac{\xi^2}{4y} \right) \right\} d\xi \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению (3.1) в области D_1 и условиям

$$u_0(x, 0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u_0(0, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

причем без ограничения общности можно считать, что $\varphi_1(0) = \tau_1(0) = 0$.

Решение задачи 3 будем искать в виде

$$u_1(x, y) = v_1(x, y) + u_0(x, y).$$

Тогда для функции $v_1(x, y)$ имеем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (v_{1xx} - v_{1y}) &= 0, \\ \left. \begin{aligned} v_1(x, 0) &= 0, \quad v_1(0, y) = 0, \\ v_{1x}(0, y) &= \varphi_2(y) - u_{0x}(0, y) = \Phi_1(y), \\ v_1(1, y) - v_1(x_0, y) &= \\ &= \varphi_3(y) - u_0(1, y) + u_0(x_0, y) = \Phi_2(y). \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Положим

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \left\{ -\frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp \left[-\frac{x^2}{4(y-\eta)} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \right\} \theta_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \left\{ \frac{1}{(y-\eta)^{3/2}} \exp \left[-\frac{1}{4(y-\eta)} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{x-1}{(y-\eta)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x-1)}{4(y-\eta)} \right] \right\} \theta_2(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Функция $v_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению (3.1) при $y > 0$ и условиям $v_1(x, 0) = v_1(0, y) = 0$. Удовлетворяя последним двум условиям (3.28), имеем систему интегральных уравнений Вольterra второго рода

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(y) + \int_0^y K_1(y, \eta) \theta_2(\eta) d\eta &= \Phi_1(y), \\ \theta_2(y) + \int_0^y K_2(y, \eta) \theta_1(\eta) d\eta + \\ + \int_0^y K_3(y, \eta) \theta_2(\eta) d\eta &= \Phi_2(y), \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(y, \eta) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}} \exp \left[-\frac{1}{4(y-\eta)} \right] - \\ &- \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(y-\eta)^{5/2}} \exp \left[-\frac{1}{4(y-\eta)} \right], \end{aligned}$$

$$K_2(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} (y-\eta)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{4(y-\eta)} \right] - \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi} (y-\eta)^{1/2}} \exp \left[-\frac{x_0^2}{4(y-\eta)} \right], \\ K_3(y, \eta) = \frac{x_0-1}{2\sqrt{\pi} (y-\eta)^{3/2}} \cdot \exp \left[-\frac{(x_0-1)^2}{4(y-\eta)} \right].$$

В силу свойств функций $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(y)$ система уравнений (3.29) допускает единственное решение в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Задача 4. Требуется определить решение задачи 1, если условия (3.2) и (3.3) заменяются условиями (3.24) и

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (3.30)$$

Выписав решение уравнения (3.1) в области D_2 , удовлетворяющее условиям (3.30) и (3.4), как и в [28, гл. V], получаем соотношение между $\tau_2(x)$ и $v_2(x)$:

$$\tau_2'(x) - v_2(x) = q(x), \quad (3.31)$$

где

$$q(x) = \psi_1' \left(\frac{x}{2} \right) + \sqrt{2} \psi_2 \left(\frac{x}{2} \right) - \sqrt{2} \psi_2(0).$$

Соотношение между $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$ имеет вид (3.15). Исключая из (3.15) и (3.31) функции $\tau_2(x)$, $v_1(x)$ и $v_2(x)$ для определения функции $\tau_1(x)$, приходим к уравнению (3.16) с условиями

$$\tau_1(0) = \varphi_1(0), \quad \tau_1'(0) = \varphi_2(0). \quad (3.32)$$

$$\tau_1(1) - \tau_1(x_0) = \varphi_3(0), \quad 0 \leq x_0 < 1,$$

причем коэффициенты и правая часть уравнения (3.16) определены по формулам

$$m(x) = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \quad n(x) = \frac{\delta(x) + \alpha'(x)}{\beta(x)},$$

$$P_1(x) = -\frac{q(x) + \gamma(x) - \gamma'(x)}{\beta(x)}.$$

Как и в случае задачи (3.16), (3.17) решение уравнения (3.16), удовлетворяющее первым двум условиям (3.32), представляем в виде

$$\begin{aligned} \tau_1(x) = & \left(x^2 + \int_0^x R(x, t) t^2 dt \right) \frac{k}{2} + \\ & + P_2(x) + \int_0^x R(x, t) p_2(t) dt, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где

$$P_2(x) = \varphi_1(0) + [\varphi_2(0) + m(0) \varphi_1(0)] + \int_0^x (x-t) p_1(t) dt;$$

$R(x, t)$ — резольвента ядра;

$$K(x, t) = -m(t) + (x-t)[m'(t) - n(t)].$$

Отсюда, пользуясь последним условием из (3.32), находим

$$\begin{aligned} k = \frac{2}{\rho_1} & \left[\varphi_3(0) - p_2(1) + p_2(x_0) - \right. \\ & \left. - \int_0^1 R(1, t) p_2(t) dt + \int_0^{x_0} R(x_0, t) p_2(t) dt \right] \end{aligned}$$

при

$$\rho_1 = 1 - x_0^2 + \int_0^1 R(1, t) t^2 dt - \int_0^{x_0} R(x_0, t) t^2 dt \neq 0.$$

Функции $\tau_2(x)$, $v_1(x)$ и $v_2(x)$ определяем из (3.5), (3.15). Таким образом, задача 4 эквивалентно редуцируется к двум задачам: в области D_1 к задаче 3, в области D_2 — к задаче (3.1), (3.30), (3.4) и $u(x, -0) = \tau_2(x)$. Решение последней задачи (задача В [28, гл. V]) выписывается в явном виде

$$\begin{aligned} u_2(x, y) = & \tau_2(x+y) - \psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + \\ & + \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x-y}^{x+y} \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{-2y} \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Единственность решения задачи 4 следует из формул (3.33), (3.34) и из единственности решения задачи 3.

§ 4. Задачи Геллерстедта для парабола-гиперболического уравнения третьего порядка

Рассмотрим уравнение

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} u_{xx} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 u & \text{в } D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_k u_x + b_k u_y + c_k u & \text{в } D_k (k=2,3), \end{cases} \quad (4.1)$$

где a_k, b_k, c_k ($k=1, 2, 3$) — действительные числа, причём $b_1 < 0$, области D_1, D_2 и D_3 определены в § 2 главы 1.

Задача Γ_1 . Найти функцию $u(x, y)$, которая:

1) является регулярным решением уравнения (4.1) в областях D_k ($k=1, 2, 3$) всюду, кроме точек отрезка AB и характеристик $E_1 C_1, E_1 C_2$;

2) $u(x, y) \in C(\overline{D})$;

3) удовлетворяет условиям склеивания

$$u(x, -0) = u(x, +0), \quad 0 \leq x \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \leq x \leq 1,$$

$$u_y(x, -0) = u_y(x, +0), \quad 0 < x < \varepsilon, \quad \varepsilon < x < 1;$$

4) краевым условиям

$$\alpha_1(y) u(0, y) + \beta_1(y) u(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq x_0 \leq 1, \quad (4.2)$$

$$u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4.3)$$

$$\alpha_2(y) u_x(1, y) + \beta_2(y) u(1, y) = \varphi_3(y), \quad (4.4)$$

$$u|_{E_1 C_1} = \psi_1(x), \quad u_n|_{E_1 C_1} = \psi_2(x), \quad \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \varepsilon, \quad (4.5)$$

$$u|_{E_1 C_2} = \psi_3(x), \quad u_n|_{E_1 C_2} = \psi_4(x), \quad \varepsilon \leq x \leq \frac{\varepsilon+1}{2}, \quad (4.6)$$

где

$$\alpha_k(y), \beta_k(y) \quad (k=1, 2), \quad \varphi_k(y) \quad (k=\overline{1, 3}),$$

$\psi_k(x)$ ($k=\overline{1, 4}$) — заданные гладкие функции, причём

$\psi_1(\varepsilon) = \psi_2(\varepsilon)$; n — внутренняя нормаль; $\alpha_1(y) \neq 0$;

$$\alpha_2^2(y) + \beta_2^2(y) \neq 0.$$

Задача Γ_2 . Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи Γ_1 , кроме (4.6), вместо которых должны выполняться условия

$$u|_{BC_1} = \psi_3(x), \quad u_n|_{BC_1} = \psi_4(x), \quad \frac{\varepsilon+1}{2} \leq x \leq 1. \quad (4.7)$$

Нетрудно заметить, что уравнения (4.1) эквивалентны системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 u &= v(x, y), \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ в } D_1, \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} + a_k u_x + b_k u_y + c_k u &= v(x, y), \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ в } D_k (k=2, 3). \quad (4.9)$$

Решение уравнений

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ в } D_1,$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ в } D_k (k=2, 3)$$

имеет вид $v(x, y) = \omega_1(y)$ в D_1 , $v(x, y) = \omega_k(y)$ в $D_k (k=2, 3)$. Поэтому систему уравнений (4.8) и (4.9) эквивалентным образом можно записать в виде

$$u_{xx} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 u = \omega_1(y) \text{ в } D_1, \quad (4.10)$$

$$u_{xx} - u_{yy} + a_k u_x + b_k u_y + c_k u = \omega_k(y) \text{ в } D_k (k=2, 3). \quad (4.11)$$

Из условий

$$u_n|_{E_1 C_2} = \psi_2(x), \quad u_n|_{E_1 C_2} = \psi_4(x)$$

имеем, что

$$\left. \begin{aligned} u_{xx}(x, x-\varepsilon) - u_{yy}(x, x-\varepsilon) &= -\sqrt{2} \psi_2'(x), \\ u_{xx}(x, -x+\varepsilon) - u_{yy}(x, -x+\varepsilon) &= \sqrt{2} \psi_4'(x). \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Кроме того, непосредственно из условий (4.5) и (4.6) находим

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, x-\varepsilon) &= \frac{1}{2} \psi_1'(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x), \\ u_y(x, x-\varepsilon) &= \frac{1}{2} \psi_1'(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x), \\ u_x(x, -x+\varepsilon) &= \frac{1}{2} \psi_3'(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_4(x), \\ u_y(x, -x+\varepsilon) &= -\frac{1}{2} \psi_3'(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_4(x). \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Теперь, пользуясь условиями (4.12), (4.13), а также первыми двумя условиями (4.5) и (4.6) из (4.11), определяем

$$\left. \begin{aligned} \omega_2(y) &= c_2 \psi_1(y + \varepsilon) + \frac{a_2 + b_2}{2} \psi_1'(y + \varepsilon) - \\ &- \sqrt{2} \psi_2'(y + \varepsilon) - \frac{a_2 - b_2}{\sqrt{2}} \psi_2(y + \varepsilon) \text{ в } D_2, \\ \omega_3(y) &= c_3 \psi_3(-y + \varepsilon) + \frac{a_3 - b_3}{2} \psi_3'(-y + \varepsilon) + \\ &+ \sqrt{2} \psi_4'(-y + \varepsilon) + \frac{a_3 + b_3}{\sqrt{2}} \psi_4(-y + \varepsilon) \text{ в } D_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Как известно [95], решение задачи Коши с условиями

$$u(x, 0 = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = v(x) \quad (4.15)$$

для уравнения (4.11) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2} \left[\tau(x - y) \exp\left(-\frac{a_k - b_k}{2} y\right) + \right. \\ &+ \tau(x + y) \exp\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \left. \right] - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{b_k}{2} y\right) \times \\ &\times \int_{x-y}^{x+y} \left\{ \frac{b_k}{2} J_0\left(\sqrt{\lambda_k} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right) - \right. \\ &- \sqrt{\lambda_k} y \frac{J_1\left(\sqrt{\lambda_k} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \left. \right\} \exp\left[-\frac{a_k}{2}(x-\xi)\right] \tau(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \exp\left(\frac{b_k}{2} y\right) \int_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{\lambda_k} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\right) \times \\ &\times \exp\left[-\frac{a_k}{2}(x-\xi)\right] v(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} J_0\left(\sqrt{\lambda_k} \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}\right) \omega_k(\eta) d\xi d\eta, \quad (4.16) \end{aligned}$$

где $\omega_k(y)$ ($k=2,3$) определены по формуле (4.14);

$$\lambda_k = \frac{1}{4} (4c_k^2 - a_k^2 - b_k^2), \quad k=2,3.$$

Удовлетворяя (4.16) первому краевому условию (4.5), имеем функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$:

$$\tau(x) + \int_x^\varepsilon A_1(x, \xi) \tau(\xi) d\xi - \int_x^\varepsilon A_2(x, \xi) v(\xi) d\xi = P(x), \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(x, \xi) &= \frac{b_2}{2} A_2(x, \xi) - \frac{V\bar{\lambda}_2(x-\varepsilon)}{2} \times \\ &\times \frac{J_1(V\bar{\lambda}_2 V(\varepsilon-\xi)(x-\xi))}{V(\varepsilon-\xi)(x-\xi)} \exp\left[-\frac{a_2}{2}(x-\xi)\right], \\ A_2(x, \xi) &= J_0(V\bar{\lambda}_2 V(\varepsilon-\xi)(x-\xi)) \exp\left[-\frac{a_2}{2}(x-\xi)\right], \\ P(x) &= -\psi_1(\varepsilon) \exp\left[-\frac{a_2}{2}(x-\varepsilon)\right] + \exp\left[-\frac{a_2+b_2}{2}(x-\varepsilon)\right] \times \\ &\times \left[2\psi_1\left(\frac{x+\varepsilon}{2}\right) - \int_0^{\frac{x-\varepsilon}{2}} \int_{\eta+\varepsilon}^{x-\eta} J(V\bar{\lambda}_2 V(\varepsilon-\xi+\eta)(x-\xi-\eta)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \omega_2(\eta) d\xi d\eta \right]. \end{aligned}$$

Из анализа постановки задачи Γ_1 следует, что при $y \rightarrow +0$ выполняется соотношение

$$\tau''(y) + a_1 \tau'(x) + c_1 \tau(x) + b_1 v(x) = \omega_1(0). \quad (4.18)$$

Исключая из (4.17) и (4.18) $v(x)$, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $\tau'(x)$:

$$\begin{aligned} \tau'(x) + \int_x^\varepsilon K(x, t) \tau'(t) dt &= Q(x) - \omega_1(0) \int_x^\varepsilon A_2(x, \xi) d\xi + \\ &+ \exp\left[-\frac{a_2}{2}(x-\varepsilon)\right] \tau'(\varepsilon-0), \quad 0 < x < \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, t) &= b_1 - a_1 A_2(x, t) + A_{2t}(x, t) + \\ &+ \int_x^t [b_1 A_1(x, \xi) + c_1 A_2(x, \xi)] d\xi, \\ Q(x) &= -b_1 P(x) + \left\{ b_1 + \int_x^\varepsilon [b_1 A_1(x, \xi) + \right. \end{aligned}$$

$$+ c_1 A_2(x, \xi)] d\xi \} \psi_1(\varepsilon).$$

Обращая интегральное уравнение (4.19) через резольвенты $R(x, t)$ ядра $K(x, t)$, находим

$$\tau(x) = Q_1(x) + Q_2(x) \omega_1(0) + Q_3(x) \tau'(\varepsilon - 0), \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \psi_1(\varepsilon) - \int_x^\varepsilon Q(t) dt + \int_x^\varepsilon dt \int_t^\varepsilon R(t, \xi) Q(\xi) d\xi, \\ Q_2(x) &= \int_x^\varepsilon dt \int_t^\varepsilon A_2(t, \xi) d\xi - \int_x^\varepsilon dt \int_t^\varepsilon R(t, s) ds \int_s^\varepsilon A_2(s, \xi) d\xi, \\ Q_3(x) &= \frac{2}{a_2} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{a_2}{2} (x - \varepsilon) \right] \right\} + \\ &+ \int_x^\varepsilon dt \int_t^\varepsilon R(t, \xi) \exp \left[-\frac{a_2}{2} (\xi - \varepsilon) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, исключая из (4.18) и соотношения

$$\tau(x) - \int_\varepsilon^x B_1(x, \xi) \tau(\xi) d\xi - \int_\varepsilon^x B_2(x, \xi) \nu(\xi) d\xi = P_1(x),$$

где

$$\begin{aligned} B_1(x, \xi) &= \frac{b_3}{2} B_2(x, \xi) + \frac{V\bar{\lambda}_3(x-\varepsilon)}{2} \cdot \frac{J_1(V\bar{\lambda}_3 V(\varepsilon-\xi)(x-\xi))}{V(\varepsilon-\xi)(x-\xi)} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{a_3}{2} (x - \xi) \right], \\ B_2(x, \xi) &= J_0(V\bar{\lambda}_3 V(\varepsilon-\xi)(x-\xi)) \exp \left[-\frac{a_3}{2} (x - \xi) \right], \\ P_1(x) &= -\psi_1(\varepsilon) \exp \left[-\frac{a_3}{2} (x - \varepsilon) \right] + \exp \left[-\frac{a_3 - b_3}{4} (x - \varepsilon) \right] \times \\ &\times \left[2\psi_3\left(\frac{x + \varepsilon}{2}\right) - \int_{-\frac{x-\varepsilon}{2}}^0 \int_{\varepsilon-s}^{x+s} J_0(V\bar{\lambda}_3 V(x-\xi+s)(\varepsilon-\xi-s)) \times \right. \\ &\left. \times \omega_3(s) d\xi ds \right], \end{aligned}$$

принесенное из области D_3 , функцию $v(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \tau'(x) - \int_{\varepsilon}^x K_1(x, t) \tau'(t) dt = H(x) + \\ + \omega_1(0) \int_{\varepsilon}^x B_2(x, \xi) d\xi + \exp \left[-\frac{a_3}{2}(x - \varepsilon) \right] \tau'(\varepsilon + 0), \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(x, t) = B_{2t}(x, t) - b - a_1 B_2(x, t) + \\ + \int_{\varepsilon}^x [b_1 B_1(x, \xi) - c_1 B_1(x, \xi)] d\xi, \\ H(x) = b_1 P_1(x) - \psi_1(\varepsilon) \left\{ b_1 - \right. \\ \left. - \int_{\varepsilon}^x [b_1 B_1(x, \xi) - c_1 B_2(x, \xi)] d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Обращая интегральное уравнение Вольтерра второго рода (4.21), находим

$$\tau(x) = H_1(x) + H_2(x) \omega_1(0) + H_3(x) \tau'(\varepsilon + 0), \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(x) = \psi_1(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^x \left[H(t) + \int_{\varepsilon}^t R_1(t, \xi) H_1(\xi) d\xi \right] dt, \\ H_2(x) = \int_{\varepsilon}^x \left[\int_{\varepsilon}^t B_2(t, \xi) d\xi + \int_{\varepsilon}^t R_1(t, s) ds \int_{\varepsilon}^s B_2(s, \xi) d\xi \right] dt, \\ H_3(x) = \frac{2}{a_3} \left\{ \exp \left[-\frac{a_3}{2}(x - \varepsilon) \right] - 1 \right\} - \\ - \int_{\varepsilon}^x dt \int_{\varepsilon}^t R_1(t, \xi) \exp \left[-\frac{a_3}{2}(\xi - \varepsilon) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Неизвестные константы $\omega_1(0)$, $\tau'(\varepsilon - 0)$, $\tau'(\varepsilon + 0)$ в формулах (4.20) и (4.22) однозначно определяются из условий

$$\begin{aligned} \alpha_1(0) \tau(0) + \beta_1(0) \tau(x_0) = \varphi_1(0), \quad \tau'(0) = \varphi_2(0), \\ \alpha_2(0) \tau'(1) + \beta_2(0) \tau(1) = \varphi_3(0), \end{aligned}$$

если

$$[\alpha_2(0) H'_3(1) + \beta_2(0) H_3(1)] [\alpha_1(0) Q_2(0) Q'_3(0) + \beta_1(0) Q_2(x_0) Q'_3(0) -$$

$$- \alpha_1(0) Q_2'(0) Q_3(0) - \beta_1(0) Q_2'(0) Q_3(x_0)] \neq 0 \text{ при } 0 \leq x_0 \leq \varepsilon; \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & [\alpha_2(0) H_3'(1) + \beta_2(0) H_3(1)] [\alpha_1(0) Q_2(0) Q_3'(0) + \\ & + \beta_1(0) Q_3'(0) H_2(x_0) - \alpha_1(0) Q_2'(0) Q_3(0)] - \beta_1(0) Q_3'(0) H_3(x_0) - \\ & - [\alpha_2(0) H_2'(1) + \beta_2(0) H_2(1)] \neq 0 \text{ при } \varepsilon < x_0 \leq 1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Таким образом, при выполнении условий (4.23) или (4.24) $\tau(x)$ полностью определяется на отрезке AB , тогда в силу (4.18) $v(x)$ — на этом же отрезке. Поэтому решение задачи Γ_1 в областях D_2 и D_3 находится по формулам (4.16). Итак, для решения задачи Γ_1 в области D_1 приходим к следующей задаче: (4.10), (4.2), (4.3), (4.4) и

$$u(x, 0) = \tau(x). \quad (4.25)$$

Для решения этой краевой задачи введем новую неизвестную функцию по формуле

$$u(x, y) = v(x, y) \exp(\alpha x + \beta y),$$

где

$$\alpha = -\frac{a_1}{2}, \quad \beta = a^2 \left(c_1 - \frac{a_1^2}{4} \right),$$

$$a^2 = -\frac{1}{b_1}.$$

Тогда относительно $v(x, y)$ получим следующую задачу:

$$v_y - a^2 v_{xx} = -a^2 \omega_1(y) \exp(-\alpha x - \beta y), \quad (4.26)$$

$$v_x(0, y) + \alpha v(0, y) = \varphi_2(y) \exp(-\beta y), \quad (4.27)$$

$$\alpha_1(y) v(0, y) + \beta_1(y) \exp(\alpha x_0) v(x_0, y) = \varphi_1(y) \exp(-\beta y), \quad (4.28)$$

$$\alpha_2(y) v_x(1, y) + [\alpha \alpha_2(y) + \beta_2(y)] v(1, y) = \varphi_3(y) \exp(-\alpha - \beta y), \quad (4.29)$$

$$v(x, 0) = \tau(x) \exp(-\alpha x). \quad (4.30)$$

При решении этой задачи предположим, что $\alpha \alpha_2(y) + \beta_2(y) \neq 0$, $0 \leq y \leq h$. Как известно [49], решение задачи (4.26), (4.30) и

$$v_x(0, y) = \theta_1(y), \quad v(1, y) = \theta_2(y)$$

выписывается в виде

$$v(x, y) = \int_0^y \theta_1(\eta) G(x, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y \theta_2(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \tau(\xi) \exp(-\alpha\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi - \\
& - \alpha^2 \int_0^y \omega_1(\eta) d\eta \int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi, \quad (4.31)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G(x, y; \xi, \eta) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-4n)^2}{4a^2(y-\eta)}\right] + \right. \\
& + \exp\left[-\frac{(x+\xi-4n)^2}{4a^2(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x-\xi-2-4n)^2}{4a^2(y-\eta)}\right] - \\
& \left. - \exp\left[-\frac{(x+\xi-2-4n)^2}{4a^2(y-\eta)}\right] \right\};
\end{aligned}$$

$\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ — неизвестные функции.

Подставляя (4.31) в краевые условия (4.27), (4.28) и (4.29), имеем

$$\begin{aligned}
& \theta_1(y) + \alpha \int_0^y \theta_1(\eta) G(0, y; 0, \eta) d\eta - \alpha \int_0^y \theta_2(\eta) G_\xi(0, y; 1, \eta) d\eta - \\
& - \alpha a^2 \int_0^y \omega_1(\eta) d\eta \int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G(0, y; \xi, \eta) d\xi = \Phi_1(y), \quad (4.32) \\
& - \int_0^y \left[\frac{1}{a^2} G(0, y; 0, \eta) + \frac{\beta_1(y)}{a^2 \alpha_1(y)} \exp(\alpha x_0) G(x_0, y; 0, \eta) \right] \theta_1(\eta) d\eta + \\
& + \int_0^y \left[\frac{1}{a^2} G_\xi(0, y; 1, \eta) + \frac{\beta_1(y)}{a^2 \alpha_1(y)} \exp(\alpha x_0) G_\xi(x_0, y; 1, \eta) \right] \theta_2(\eta) d\eta + \\
& + \int_0^y \left[\int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G(0, y; \xi, \eta) d\xi \right] \omega_1(\eta) d\eta + \\
& + \int_0^y \left[\frac{\beta_1(y)}{\alpha_1(y)} \exp(\alpha x_0) \int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G(x_0, y; \xi, \eta) d\xi \right] \times \\
& \times \omega_1(\eta) d\eta = \Phi_2(y), \quad (4.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \theta_2(y) + \int_0^y \frac{\alpha_2(y)}{\alpha\alpha_2(y) + \beta_2(y)} G_x(1, y; 0, \eta) \theta_1(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^y \frac{\alpha_2(y)}{\alpha\alpha_2(y) + \beta_2(y)} G_{\xi x}(1, y; 1, \eta) \theta_2(\eta) d\eta - \int_0^y \left[\frac{a^2\alpha_2(y)}{\alpha\alpha_2(y) + \beta_2(y)} \times \right. \\ & \times \left. \int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G_x(1, y; \xi, \eta) d\xi \right] \omega_1(\eta) d\eta = \Phi_3(y), \quad (4.34) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_1(y) = \varphi_2(y) \exp(-\beta y) - \alpha \int_0^1 \tau(\xi) \exp(-\alpha\xi) G(0, y; \xi, 0) d\xi,$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(y) = & - \frac{\varphi_1(y) \exp(-\beta y)}{a^2\alpha_1(y)} + \int_0^1 \left[\frac{1}{a^2} G(0, y; \xi, 0) + \right. \\ & \left. + \frac{\beta_1(y)}{a^2\alpha_1(y)} \exp(\alpha x_0) G(x_0, y; \xi, 0) \right] \tau(\xi) \exp(-\alpha\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(y) = & \frac{\varphi_3(y) \exp(-\alpha - \beta y)}{\alpha\alpha_2(y) + \beta_2(y)} - \\ & - \frac{\alpha_2(y)}{\alpha\alpha_2(y) + \beta_2(y)} \int_0^1 \tau(\xi) \exp(-\alpha\xi) G_x(1, y; \xi, 0) d\xi. \end{aligned}$$

Рассмотрим третий интеграл уравнения (4.33)

$$\begin{aligned} I(y) = & \int_0^y \left[\int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G(0, y; \xi, \eta) d\xi \right] \omega_1(\eta) d\eta = \\ = & I_1(y) + \int_0^y \left[\int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G_1(y; \xi, \eta) d\xi \right] \omega_1(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} I_1(y) = & \int_0^y \left[\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\pi a^2(y-\eta)}} \exp \left[-\alpha\xi - \beta\eta - \frac{\xi^2}{4a^2(y-\eta)} \right] d\xi \right] \omega_1(\eta) d\eta, \\ G_1(y; \xi, \eta) = & - \frac{1}{\sqrt{\pi a^2(y-\eta)}} \left[\exp \left\{ -\frac{(\xi-2)^2}{4a^2(y-\eta)} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(\xi+2)^2}{4a^2(y-\eta)} \right\} - \right. \end{aligned}$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp \left\{ -\frac{(\xi + 4n)^2}{4a^2(y-\eta)} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(\xi - 4n)^2}{4a^2(y-\eta)} \right\} - \right. \\ \left. - \exp \left\{ -\frac{(-\xi - 2 - 4n)^2}{4a^2(y-\eta)} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(\xi - 2 - 4n)^2}{4a^2(y-\eta)} \right\} \right],$$

а Σ' означает суммирование по n от $-\infty$ до $+\infty$, исключая $n=0$.

Производя замену переменной во внутреннем интеграле $I_1(y)$ по формуле

$$\frac{\xi}{2a\sqrt{y-\eta}} = s$$

и дифференцируя полученное выражение, имеем

$$I_1'(y) = \omega_1(y) \exp(-\beta y) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \left[\frac{\exp \{ -\alpha - \beta\eta - [4a^2(y-\eta)]^{-1} \}}{2a(y-\eta)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2a\sqrt{y-\eta}} \int_0^s s \exp(-s^2 - \beta\eta - 2a\sqrt{y-\eta}s) ds \right] \omega_1(\eta) d\eta. \quad (4.35)$$

Учитывая (4.35) и (4.33), имеем

$$\omega_1(y) + \int_0^y K_1(y, \eta) \theta_1(\eta) d\eta + \int_0^y K_2(y, \eta) \theta_2(\eta) d\eta + \\ + \int_0^y K_3(y, \eta) \omega_1(\eta) d\eta = \frac{\Phi_{2y}(y)}{R(y)}, \quad (4.36)$$

где

$$K_1(y, \eta) = -\frac{1}{a^2 R(y)} \left\{ G_y(0, y; 0, \eta) + \left[\frac{\beta_1(y)}{\alpha_1(y)} \right]' \exp(\alpha x_0) \times \right. \\ \left. \times G(x_0, y; 0, \eta) + \frac{\beta_1(y)}{\alpha_1(y)} \exp(\alpha x_0) G_y(x_0, y; 0, \eta) \right\}, \\ K_2(y, \eta) = \frac{1}{a^2 R(y)} \left\{ G_{\xi y}(0, y; 1, \eta) + \left[\frac{\beta_1(y)}{\alpha_1(y)} \right]' \exp(\alpha x_0) \times \right. \\ \left. \times G_{\xi}(x_0, y; 1, \eta) + \frac{\beta_1(y)}{\alpha_1(y)} \exp(\alpha x_0) G_{\xi y}(x_0, y; 1, \eta) \right\},$$

$$\begin{aligned}
K_3(y, \eta) = & \frac{1}{R(y)} \left\{ \int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G_{1y}(y; \xi, \eta) d\xi + \right. \\
& + \left[\frac{\beta_1(y)}{\alpha_1(y)} \right]' \exp(\alpha x_0) \int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G(x_0, y; \xi, \eta) d\xi + \\
& + \frac{\beta_1(y) \exp(\alpha x_0)}{\alpha_1(y)} \int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G_y(x_0, y; \xi, \eta) d\xi - \\
& - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \exp \left[-\alpha - \beta\eta - \frac{1}{4a^2(y-\eta)} \right] \frac{1}{(y-\eta)^{3/2}} - \\
& - \frac{2a}{\sqrt{y-\eta}} \int_0^{\frac{1}{2a\sqrt{y-\eta}}} s \exp(-s^2 - \beta\eta - 2a\sqrt{y-\eta} \cdot s) ds \Bigg\}, \\
R(y) = & \exp(-\beta y) + \left[\int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G_1(y; \xi, \eta) d\xi \right] \Big|_{\eta=y} + \\
& + \frac{\beta_1(y) \exp(\alpha x_0)}{\alpha_1(y)} \left[\int_0^1 \exp(-\alpha\xi - \beta\eta) G(x_0, y; \xi, \eta) d\xi \right] \Big|_{\eta=y}
\end{aligned}$$

Таким образом, системы интегральных уравнений (4.32), (4.34) и (4.36) являются системами интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Здесь ядра интегральных уравнений имеют слабые особенности, а правые части непрерывные, поэтому системы интегральных уравнений (4.32), (4.34) и (4.36) допускают единственные решения. Следовательно, задачи (4.26)–(4.30) или эквивалентные им задачи (4.10), (4.2), (4.3), (4.4) и (4.25) имеют единственные решения.

Итак, существование решения задачи Γ_1 доказано.

Единственность решения задачи Γ_1 следует из единственности решений задач (4.10), (4.2), (4.3), (4.4), (4.25); (4.11), (4.15) и из того, что в случае однородных краевых условий $\omega_k(y) \equiv 0$ ($k=2, 3$), $\tau(x) \equiv 0$, $v(x) \equiv 0$.

Аналогично исследуется задача Γ_2 , поэтому на доказательстве существования и единственности решения задачи Γ_2 подробно останавливаться не будем.

§ 5. Задача Бицадзе для парабола-гиперболического уравнения третьего порядка

Для уравнения

$$0 = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (u_{xx} - u_y) & \text{в } D_1, \\ \frac{\partial}{\partial x} (u_{xx} - u_{yy}) & \text{в } D_2, \end{cases} \quad (5.1)$$

где области D_1 и D_2 определены в § 1 главы 1, рассмотрим задачу 1 (см. § 3 главы 1): требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям: 1) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (5.1) в области D всюду, кроме точек отрезка AB и характеристик $E_k A_k$, $E_k B_k$; 2) непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, а частные производные u_x и u_y непрерывно склеиваются по всем точкам отрезка AB , кроме, быть может, точек $A, E_1, \dots, E_m, B$, в которых они могут иметь разрывы первого рода; 3) принимает заданные значения

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (5.2)$$

$$\int_0^{\chi(y)} g(x, y) u(x, y) dx = E(y), \quad 0 < \chi(y) \leq 1, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} u|_{A_k A_{k+1}} &= \psi_k(x) \text{ при четных } k, \\ u|_{B_k B_{k+1}} &= \psi_k(x) \text{ при нечетных } k, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (5.5)$$

здесь n — внутренняя нормаль; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\chi(y)$, $E(y)$, $\psi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, m$), $\psi(x)$ и $g(x, y)$ — заданные непрерывные функции, причем

$$g(x, y) \neq 0, \quad \int_0^{\chi(y)} g(x, y) dx \neq 0,$$

$\chi', E', \psi', g_y \in C$, $\psi_k \in C^2$; если m — нечетное число, то дополнительно потребуем выполнения условия

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_y(x, 0) = \varphi_1'(0). \quad (5.6)$$

Будем придерживаться обозначений, принятых в § 3. Но в силу непрерывных условий склеиваний индексы функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ опустим.

Заметим, что для характеристических четырехугольников $A_k C B_k E_k$, $k = 1, \dots, m-1$ имеют место равенства

$$u_2(A_k) - u_2(C) + u_2(B_k) - u_2(E_k) = \omega_2(A_k) - \omega_2(C) + \omega_2(B_k). \quad (5.7)$$

В этом легко убедиться, если проинтегрировать по области $A_k C B_k E_k$ соотношение

$$u_{2xx} - u_{2yy} = -\omega_2''(y),$$

полученное из представления (3.6).

Пусть m — четное число. Как и в [8], из (3.6) в силу условий (5.4) и обозначений (3.11) имеем

$$\tau'(x) - \nu(x) = f_{2k}(x), \quad x \in J_{2k}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (5.8)$$

$$\tau'(x) + \nu(x) = f_{2k-1}(x), \quad x \in J_{2k-1}, \quad k = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (5.9)$$

где

$$f_{2k}(x) = \psi'_{2k} \left(\frac{x}{2} \right) + \omega_2' \left(-\frac{x}{2} \right),$$

$$f_{2k-1}(x) = \psi'_{2k-1} \left(\frac{x+1}{2} \right) - \omega_2' \left(\frac{x-1}{2} \right).$$

В предыдущих формулах функция ω_2 является известной: выражается формулой (3.12) и удовлетворяет условиям (3.9). С другой стороны, из (3.6) при $y \rightarrow +0$ получаем

$$\tau''(x) - \nu(x) = K, \quad (5.10)$$

где $K = -\omega_1'(0)$ — неизвестная константа, подлежащая определению. Исключая из (5.8), (5.10) и (5.9), (5.10) функцию $\nu(x)$, приходим к задачам

$$\left. \begin{aligned} \tau''(x) - \tau'(x) &= K - f_{2k}(x), \\ \tau(\varepsilon_{2k}) &= a_{2k}, \quad \tau(\varepsilon_{2k+1}) = a_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{m}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau''(x) + \tau'(x) &= K + f_{2k-1}(x), \\ \tau(\varepsilon_{2k-1}) &= a_{2k-1}, \quad \tau(\varepsilon_{2k}) = a_{2k}, \quad k = 1, \dots, \frac{m}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

где $a_i (i=1, \dots, m)$ определяются из (4.10), а $a_0 = \varphi_1(0) = \psi_0(0)$, $a_{m+1} = \varphi_2(0)$. Решения задач (5.11) и (5.12) представим соответственно в виде

$$\left. \begin{aligned} \tau(x) &= p_{2k}(x) + p_{2k}^*(x)K, \quad x \in J_{2k}, \quad k=0, 1, \dots, \frac{m}{2}, \\ \tau(x) &= p_{2k-1}(x) + p_{2k-1}^*(x)K, \quad x \in J_{2k-1}, \quad k=1, \dots, \frac{m}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

где

$$\begin{aligned} p_{2k}(x) &= \frac{a_{2k}(e^x - e^{\varepsilon_{2k}+1}) + a_{2k+1}(e^{\varepsilon_{2k}} - e^x)}{e^{\varepsilon_{2k}} - e^{\varepsilon_{2k}+1}} - \\ &- \int_{\varepsilon_{2k}}^{\varepsilon_{2k}+1} \frac{(e^{\varepsilon_{2k}} - e^x)(1 - e^{\varepsilon_{2k}+1-t})}{e^{\varepsilon_{2k}} - e^{\varepsilon_{2k}+1}} \cdot f'_{2k}\left(\frac{t}{2}\right) dt + \\ &+ \int_{\varepsilon_{2k}}^x (1 - e^{x-t}) f'_{2k}\left(\frac{t}{2}\right) dt, \\ p_{2k}^*(x) &= -\frac{e^{\varepsilon_{2k}} - e^x}{e^{\varepsilon_{2k}} - e^{\varepsilon_{2k}+1}} (1 + \varepsilon_{2k+1} - \varepsilon_{2k} - e^{\varepsilon_{2k}+1} - \varepsilon^{\varepsilon_{2k}}) - \\ &- x - 1 + \varepsilon_{2k} + e^{x-\varepsilon_{2k}}, \\ p_{2k-1}(x) &= \frac{a_{2k-1}(e^{-x} - e^{-\varepsilon_{2k}}) + a_{2k}(e^{-\varepsilon_{2k}-1} - e^{-x})}{e^{-\varepsilon_{2k}-1} - e^{-\varepsilon_{2k}}} - \\ &- \int_{\varepsilon_{2k-1}}^{\varepsilon_{2k}} \frac{(e^{-\varepsilon_{2k}-1} - e^{-x})(1 - e^{-(\varepsilon_{2k}-t)})}{e^{-\varepsilon_{2k}-1} - e^{-\varepsilon_{2k}}} \cdot f'_{2k-1}\left(\frac{t+1}{2}\right) dt + \\ &+ \int_{\varepsilon_{2k-1}}^x (1 - e^{-(x-t)}) f'_{2k-1}\left(\frac{t+1}{2}\right) dt, \\ p_{2k-1}^*(x) &= x - 1 - \varepsilon_{2k-1} + e^{-(x-\varepsilon_{2k-1})} - \\ &- \frac{e^{-\varepsilon_{2k}-1} - e^{-x}}{e^{-\varepsilon_{2k}-1} - e^{-\varepsilon_{2k}}} (\varepsilon_{2k} - \varepsilon_{2k-1} - 1 + e^{-(\varepsilon_{2k}-\varepsilon_{2k-1})}). \end{aligned}$$

Из постановки задачи 1 следует, что выполняется условие согласования [см. (5.3)]

$$\int_0^{\chi(0)} g(x, 0) \tau(x) dx = E(0). \quad (5.14)$$

Отсюда, подставляя вместо $\tau(x)$ ее значение из (5.13), находим

$$K = \frac{1}{\mu} \left[E(0) - \sum_{k=0}^{l-1} \int_{\varepsilon_k}^{\varepsilon_{k+1}} g(x, 0) p_k(x) dx - \int_{\varepsilon_l}^{\chi(0)} g(x, 0) p_l(x) dx \right], \quad (5.15)$$

если

$$\mu = \sum_{k=0}^{l-1} \int_{\varepsilon_k}^{\varepsilon_{k+1}} g(x, 0) p_k^*(x) dx + \int_{\varepsilon_l}^{\chi(0)} g(x, 0) p_l^*(x) dx \neq 0. \quad (5.16)$$

Итак, при выполнении условия (5.16) $\tau(x)$ определяется по формулам (5.13), а $v(x)$, например, по (5.8), (5.9).

Теперь нетрудно доказать, что функция

$$u(x, y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v(t) dt + \omega_2(y) \quad (5.17)$$

является решением уравнения (5.1) в области D_2 всюду, кроме точек характеристик $E_k A_k$ и $E_k B_k$ ($k = 1, \dots, m$).

В области D_1 приходим к следующей задаче.

Задача 2. Найти регулярное в области $\bar{D}_1$ решение уравнения (5.1), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}_1$ и удовлетворяющее условиям (5.2), (5.3) и $u_1(x, 0) = \tau(x)$, причем выполняются условия согласования (5.14) и $\tau(0) = \varphi_1(0)$, $\tau(1) = \varphi_2(0)$.

В силу представления (3.6) задача 2 эквивалентным образом может быть сведена к следующей задаче:

$$v_{2xx} - v_{2y} = 0, \quad (5.18)$$

$$\left. \begin{aligned} v_2(0, y) &= \varphi_1(y) - \omega_1(y), \\ v_2(1, y) &= \varphi_2(y) - \omega_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ v_2(x, 0) &= \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \int_0^{\chi(y)} g(x, y) v_2(x, y) dx + \\ + \omega_1(y) \int_0^{\chi(y)} g(x, y) dx &= E(y), \quad 0 \leq y \leq h. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Как известно, решение уравнения (5.18), удовлетворяющее первым трем условиям из (5.19), имеет вид

$$\begin{aligned} v_2(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y [\varphi_1(\eta) - \omega_1(\eta)] G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y [\varphi_2(\eta) - \omega_1(\eta)] C_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 G(x, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [U(x, y; \xi + 2n, \eta) - U(x, y; -\xi + 2n, \eta)], \\ U(x, y; \xi, \eta) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right\}, & y > \eta, \\ 0, & y \leq \eta. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя (5.20) в последнее условие из (5.19), после некоторых преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\omega_1(y)$:

$$\omega_1(y) + \int_0^y K(y, \eta) \omega_1(\eta) d\eta = g_1(y), \quad (5.21)$$

где

$$K(y, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \int_0^{\chi(y)} g(x, y) dx} \left\{ \int_0^{\chi(y)} [G_\xi(x, y; 1, \eta) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -G_{\xi}(x, y; 0, \eta)]g(x, y)dx \Big\}, \\
g_1(y) = & \frac{1}{\int_0^{\chi(y)} g(x, y)dx} \left\{ E(y) + \right. \\
& + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\chi(y)} g(x, y)dx \int_0^y [G_{\xi}(x, y; 1, \eta) \varphi_2(\eta) - \\
& - G_{\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta)] d\eta - \\
& \left. - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\chi(y)} g(x, y)dx \int_0^1 G(x, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi \right\}.
\end{aligned}$$

В силу свойств функций $K(y, \eta)$ и $g_1(y)$ заключаем, что уравнение (5.22) допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение. Следовательно, задача 2 имеет единственное решение.

Единственность решения задачи 1 следует из единственности решения задачи 2 и из формулы (5.17) при условии (5.16).

Теперь рассмотрим задачу 1 при нечетном m . В этом случае значения функции в точках E_k , $k=1, m$ нельзя определить, так как значение $u(C)$ неизвестно [см. (5.7)]. Но это значение может быть определено из условия (5.6). Для этого рассмотрим задачу (5.11) при $m=0$, решение которого можно выписать в явном виде. Тогда из (5.8) при $m=0$ легко находим

$$\begin{aligned}
v(x) = & \frac{e^{\varepsilon_1} - \varepsilon_1 e^x - 1}{1 - e^{\varepsilon_1}} K - \frac{e^x}{1 - e^{\varepsilon_1}} a_1 + \\
& + \int_0^{\varepsilon_1} \frac{e^x (1 - e^{\varepsilon_1 - t})}{1 - e^{\varepsilon_1}} f_0(t) dt - \int_0^x e^{x-t} f_0(t) dt - \\
& - f_0(x) + \frac{e^x}{1 - e^{\varepsilon_1}} \psi_0(0).
\end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь условием (5.6), определим

$$a_1 = (e^{\varepsilon_1} - \varepsilon_1 - 1)K + q_1,$$

а из (5.7) —

$$u_2(C) = -(e^{\varepsilon_1} - \varepsilon_1 - 1)K - q_1 +$$

$$+ u_2(A_1) + u_2(B_1) - \omega_2(A_1) + \omega_2(C) - \omega_2(B_1)$$

и тем самым

$$a_k = (e^{\varepsilon_1} - \varepsilon_1 - 1)K + q_k, \quad k = 2, \dots, m,$$

где

$$q_1 = \psi_0(0) - (1 - \varepsilon_1) \left[f_0(0) + \varphi_1'(0) \right] + \int_0^{\varepsilon_1} (1 - e^{\varepsilon_1 - t}) f_0(t) dt,$$

$$q_k = q_1 - u(A_1) - u(B_1) + u(A_k) + u(B_k) + \\ + \omega_2(A_1) + \omega_2(B_1) - \omega_2(A_k) - \omega_2(B_k), \quad k = 2, \dots, m.$$

После этого решения задач (5.11) $\left(k=0, 1, \dots, \frac{m-1}{2}\right)$ и (5.12) $\left(k=1, \dots, \frac{m+1}{2}\right)$ можно представить в виде (5.13), при этом $p_i(x)$, $i=0, 1, \dots, m+1$ определяются как и раньше. Затем из (5.14) определим значение K по формуле (5.15) при выполнении условия (5.16). Дальнейшее исследование проводится как и в случае четного m .

В заключение отметим, что некоторые краевые задачи с неклассическими граничными условиями вида (5.3) для параболических уравнений второго порядка рассматривались в работах [107, 52, 50].

Глава 4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Изучаются краевые задачи для уравнения

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c\right) \bar{L}u = 0$$

в односвязной области D , ограниченной отрезками $A(0, 0)A_0(0, h)$, $A_0(0, h)B_0(1, h)$, $B_0(1, h)B(1, 0)$ прямых $x=0$, $y=h=\text{const}>0$, $x=1$ и характеристиками $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ уравнения колебания струны, пересекающимися в точке $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, т. е. $D = D_1 \cup AB \cup D_2$, где $D_1 = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y \leq h\}$, $D_2 = \{(x, y): -\frac{1}{2} < y < 0, -y < x < 1+y\}$; $\bar{L}$ — парабола-гиперболический оператор (модельный или с младшими членами); a , b и c — заданные вещественные числа, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Заметим, что на корректную постановку краевых задач для уравнения (1) существенное влияние оказывают коэффициенты a , b и c . Уравнение (1) охватывает широкий класс ранее изученных уравнений. Например, если $a=1$, $b=c=0$ и $b=1$, $a=c=0$, а $\bar{L}$ — модельный парабола-гиперболический оператор, то получаем уравнения, изученные в работах [28, 68]; уравнение (1), в котором $a=c=0$, $b=1$, а

$$\bar{L}u \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_y, & y < 0, m > 0, \end{cases}$$

рассмотрено в [69]. В этой работе решение ищется в виде $u(x, y) = v(x, y) + \omega(x)$, где $v(x, y)$ — общее решение уравнения $\bar{L}v = 0$. Однако при $y < 0$ это представление не имеет места. Если же в уравнении (1) $c=0$, а

$$\bar{L}u = \begin{cases} u_y - u_{xx} - \lambda(y) \delta_0 u, & y > 0, \\ u_{xx} - u_y, & y < 0, \end{cases}$$

то получится уравнение, исследованное в работе [54]. Отметим, что краевые условия одной задачи, изученной в [54], недостаточны для полного определения произвольной функции, входящей в представление общего решения уравнения.

§1. Задача D_{abc}

Ставится и исследуется основная задача D_{abc} для уравнения

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c\right) Lu = 0, \quad (1.1)$$

где

$$L \equiv \begin{cases} L_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} & \text{в } D_1, \\ L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \text{в } D_2. \end{cases}$$

1. Перед тем как приступить к полной формулировке рассматриваемых ниже задач, выпишем краевые условия, которые используются в их постановке для различных случаев поведения коэффициентов a , b и c :

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.2)$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.3)$$

$$u_{xx}(1, y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.4)$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (1.5)$$

$$u|_{BC} = \psi_2(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AC} = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{BC} = \psi_4(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (1.8)$$

где n — внутренняя нормаль, φ_i, ψ_i ($i = \overline{1, 4}$) — заданные функции, причем $\varphi_1, \varphi_2 \in C^k$ ($0 \leq y < h$), $\varphi_3, \varphi_4 \in C^{k-1}$ ($0 < y < h$), $\psi_{2m-1} \in C^{k-m+2}$ ($0 < x \leq \frac{1}{2}$), $\psi_{2m} \in C^{k-m+2}$ ($\frac{1}{2} < x \leq 1$), $m = 1, 2$; $k = 1$ при $ab = 0$, $k = 2$ при $ab \neq 0$, $\psi_1(0) = \varphi_1(0)$, $\psi_2(1) = \varphi_2(0)$,

$$\psi_3' \left(\frac{1}{2} \right) = -\psi_4' \left(\frac{1}{2} \right), \quad \psi_1'(0) = \sqrt{2} \psi_3(0) - 2\varphi_1'(0),$$

$$\psi_2'(1) = -\sqrt{2} \psi_4(1) + 2\varphi_2'(0).$$

Задача D_{abc} . Требуется определить функцию $u(x, y)$, которая:

I) непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$;

II) является регулярным решением уравнения (1.1) в области D при $y \neq 0$;

III) удовлетворяет следующим краевым условиям:

1) если $0 < b/a < 1$, то при $a \neq b$, а также при $a = b$, но $c \neq 0$, выполняется одна из групп условий $\{(1.2), (1.3), (1.5), (1.7)\}$, $\{(1.2), (1.3), (1.6), (1.7)\}$, а при $a = b$ и $c = 0$ выполняется только группа условий $\{(1.2), (1.3), (1.5), (1.7)\}$, т. е. в этом случае условия (1.5) и (1.6) неравноправны;

2) если $1 < b/a < +\infty$, то выполняется одна из групп условий $\{(1.2), (1.3), (1.5), (1.7), (1.8)\}$, $\{(1.2), (1.3), (1.6), (1.7), (1.8)\}$;

3) если $-\infty < b/a < -1$, то выполняется одна из групп условий $\{(1.2), (1.4), (1.5), (1.7), (1.8)\}$, $\{(1.2), (1.4), (1.6), (1.7), (1.8)\}$;

4) если $-1 < b/a < 0$, то при $a \neq -b$, а также при $a = -b$, но $c \neq 0$, выполняется одна из групп условий $\{(1.2), (1.4), (1.5), (1.8)\}$, $\{(1.2), (1.4), (1.6), (1.8)\}$; при $a = -b$ и $c = 0$ выполняется только группа условий $\{(1.2), (1.4), (1.6), (1.8)\}$, т. е. в этом случае условия (1.5) и (1.6) неравноправны;

5) если $a = 0$, $b \neq 0$, то выполняется одна из групп условий $\{(1.2), (1.5), (1.7), (1.8)\}$, $\{(1.2), (1.6), (1.7), (1.8)\}$;

6) если $a \neq 0$, $b = 0$, то выполняется одна из групп условий $\{(1.2), (1.3), (1.5), (1.7)\}$, $\{(1.2), (1.3), (1.5), (1.8)\}$, $\{(1.2), (1.3), (1.6), (1.7)\}$, $\{(1.2), (1.3), (1.6), (1.8)\}$, $\{(1.2), (1.4), (1.5), (1.7)\}$, $\{(1.2), (1.4), (1.5), (1.8)\}$, $\{(1.2), (1.4), (1.6), (1.7)\}$, $\{(1.2), (1.4), (1.6), (1.8)\}$;

IV) во всех случаях, за исключением случая 6), удовлетворяет на отрезке AB непрерывным условиям склеивания со своими первыми и вторыми производными, а в случае 6) — только первыми производными.

Кроме того, в задаче D_{abc} вместо условий (1.3) и (1.4) можно брать следующие условия:

$$u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.9)$$

$$u_x(1, y) = \varphi_4(y), \quad 0 < y < h \quad (1.10)$$

соответственно.

В соответствии с условием IV) задачи D_{abc} примем обозначения:

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x), \quad (1.11)$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = v(x), \quad (1.12)$$

$$u_{yy}(x, +0) = u_{yy}(x, -0) = \mu(x), \quad (1.13)$$

где $\tau(x)$, $v(x)$, $\mu(x)$ — пока неизвестные функции, причем согласно условию IV) функции $\tau(x)$, $v(x)$, $\mu(x)$, $\tau'(x)$, $v'(x)$, $\tau''(x)$ непрерывны на замкнутом или открытом отрезке AB в зависимости от характера задачи.

Положим

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

Тогда уравнение (1.1) можно переписать в виде двух систем

$$\left. \begin{aligned} u_{1xx} - u_{1y} &= v_1(x, y), \\ av_{1x} + bv_{1y} + cv_1 &= 0, \end{aligned} \right\} (x, y) \in D_1, \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{2xx} - u_{2yy} &= v_2(x, y), \\ av_{2x} + bv_{2y} + cv_2 &= 0, \end{aligned} \right\} (x, y) \in D_2, \quad (1.15)$$

где $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$ — произвольные достаточно гладкие функции.

Нетрудно заметить, что общее решение уравнения

$$av_{ix} + bv_{iy} + cv_i = 0, \quad i = 1, 2$$

имеет вид:

а) при $ab \neq 0$

$$v_i(x, y) = \omega_i(bx - ay) \exp \left[-\frac{c}{2ab}(bx + ay) \right]; \quad (1.16)$$

б) $a \neq 0, b = 0$

$$v_i(x, y) = \omega_i(y) \exp \left(-\frac{c}{a}x \right); \quad (1.17)$$

в) при $a = 0, b \neq 0$

$$v_i(x, y) = \omega_i(x) \exp \left(-\frac{c}{b}y \right), \quad (1.18)$$

где $\omega_i(bx - ay)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, а $\omega_i(y)$, $\omega_i(x)$ — произвольные непрерывные функции.

Можно показать, что в задаче D_{abc} случаи 4) и 3) при помощи замены независимого переменного $x = l - \xi$ редуцируются к случаям 1) и 2) соответственно. Поэтому будем рассматривать только случаи 1), 2), 5) и 6).

2. Рассмотрим случай 1). В силу $0 < b/a \leq 1$ без ограничения общности можно положить $a > 0$ и $b > 0$, тогда выполняются неравенства $0 < b \leq (b+a)/2$, $0 \leq bx - ay \leq (b+a)/2$, $(x, y) \in D_2$.

Учитывая (1.16), вместо систем уравнений (1.14) и (1.15) можем рассмотреть уравнения:

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1 (bx - ay) \exp \left[-\frac{c}{2ab} (bx + ay) \right], \quad (1.19)$$

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_2 (bx - ay) \exp \left[-\frac{c}{2ab} (bx + ay) \right]. \quad (1.20)$$

Общее решение уравнения (1.20) имеет вид

$$u_2(x, y) = F(x+y) + \Phi(x-y) + \frac{1}{4} \int_0^{x+y} d\xi \int_1^{x-y} \omega_2 \left(\frac{b-a}{2} \xi + \right. \\ \left. + \frac{b+a}{2} \eta \right) \exp \left[-\frac{c}{2ab} \left(\frac{b+a}{2} \xi + \frac{b-a}{2} \eta \right) \right] d\eta, \quad (1.21)$$

где F и Φ — трижды непрерывно дифференцируемые функции.

Подставляя (1.21) в (1.5) и (1.7), соответственно находим

$$\Phi(x) = \psi_1 \left(\frac{x}{2} \right) - F(0), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.22)$$

$$\omega_2(z) = \sqrt{2} \psi'_3 \left(\frac{z}{a+b} \right) \exp \left[\frac{c(b-a)}{2ab(b+a)} z \right], \quad (1.23)$$

где $z = bx - ay$, $0 \leq z \leq (b+a)/2$, причем должно выполняться равенство

$$F'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_3 \left(\frac{1}{2} \right).$$

Учитывая (1.22) и (1.23), из (1.21) получаем

$$u_2(x, y) = F(x+y) - F(0) + P(x, y), \quad (1.24)$$

где

$$P(x, y) = \psi_1 \left(\frac{x-y}{2} \right) + H(x, y), \\ H(x, y) = \frac{1}{4} \int_0^{x+y} d\xi \int_1^{x-y} \omega_2 \left(\frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \eta \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{c}{2ab} \left(\frac{b+a}{2} \xi + \frac{b-a}{2} \eta \right) \right] d\eta,$$

а функция ω_2 определяется формулой (1.23).

Из (1.24) при $y \rightarrow 0$ с учетом (1.11) и (1.12) находим

$$\nu(x) = \tau'(x) - \alpha(x), \quad (1.25)$$

где

$$\alpha(x) = \frac{\partial P(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, 0)}{\partial y},$$

а из (1.20) при $y \rightarrow 0$ с учетом (1.11) и (1.13) имеем

$$\mu(x) = \tau''(x) - \lambda(x), \quad (1.26)$$

где

$$\lambda(x) = \omega_2(bx) \exp\left(-\frac{cx}{2a}\right) - \text{известная функция.}$$

Уравнение (1.1) при $y > 0$ перепишем в виде

$$au_{1xx} + bu_{1xy} - au_{1xy} + cu_{1xx} = bu_{1yy} + cu_{1y}.$$

Интегрируя это уравнение по x от 0 до x , получаем

$$au_{1xx} + bu_{1xy} - au_{1y} + cu_{1x} = \int_0^x (bu_{1yy} + cu_{1y}) dt + h(y), \quad (1.27)$$

где $h(y)$ — произвольная непрерывная функция. Отсюда при $y \rightarrow +0$ с учетом (1.11), (1.12), (1.13), (1.25) и (1.26) получаем

$$(a+b)\tau''(x) - (a+b-c)\tau'(x) - c\tau(x) = \gamma(x) + k_{11}, \quad (1.28)$$

где

$$\gamma(x) = ba'(x) - a\alpha(x) - \int_0^x [b\lambda(t) + ca(t)] dt$$

— известная функция; $k_{11} = h(0) - b\tau'(0) - c\tau(0)$ — неизвестная константа, подлежащая определению.

Уравнение (1.28) решаем при условиях

$$\left. \begin{aligned} \tau(0) &= u_1(0, 0) = \varphi_1(0), \\ \tau(1) &= u_1(1, 0) = \varphi_2(0), \\ \tau'(0) &= \sqrt{2}\psi_3(0) - \varphi_1'(0). \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Это решение имеет вид:

а) при $c \neq 0$ и $c \neq -(a+b)$

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{1}{a+b+c} \int_0^x \left\{ \exp(x-t) - \exp\left[\frac{c(t-x)}{b+a}\right] \right\} \gamma(t) dt - \\ &\quad - \frac{1}{c} k_{11} + k_{12} \exp x + k_{13} \exp\left(-\frac{cx}{b+a}\right), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где

$$k_{13} = \left[\frac{c(e-1)}{b+a} + \exp\left(-\frac{c}{b+a}\right) - 1 \right]^{-1} \left\{ \varphi_2(0) - \varphi_1(0) - \right. \\ \left. - (e-1) \left[V\sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0) \right] - \frac{1}{a+b+c} \int_0^1 \left[\exp(1-t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \exp\left(\frac{ct-c}{b+a}\right) \right] \gamma(t) dt \right\}, \quad k_{12} = \frac{c}{b+a} k_{13} + V\sqrt{2} \psi_3(0) - \\ - \varphi_1'(0), \quad k_{11} = c [k_{12} + k_{13} - \varphi_1(0)];$$

б) при $c = -(a+b)$

$$\tau(x) = \frac{1}{a+b} \int_0^x (x-t) \exp(x-t) \gamma(t) dt + \\ + \frac{1}{a+b} k_{11} + (k_{13} + k_{12}x) \exp x, \quad (1.31)$$

где

$$k_{13} = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) + e \left[V\sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0) \right] + \\ + \frac{1}{a+b} \int_0^1 (1-t) \exp(1-t) \gamma(t) dt,$$

$$k_{12} = V\sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0) - k_{13}, \quad k_{11} = (a+b) [\varphi_1(0) - k_{13}];$$

в) при $c=0$

$$\tau(x) = \frac{1}{a+b} \int_0^x [\exp(x-t) - 1] \gamma(t) dt - \\ - \frac{1+x}{a+b} k_{11} + k_{12} \exp x + k_{13}, \quad (1.32)$$

где

$$k_{13} = \varphi_1(0) - \left[V\sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0) \right],$$

$$k_{12} = \frac{1}{e-2} \left\{ \varphi_2(0) - \varphi_1(0) - V\sqrt{2} \psi_3(0) + \varphi_1'(0) - \right.$$

$$-\frac{1}{a+b} \int_0^1 [\exp(1-t) - 1] \gamma(t) dt \Big\},$$

$$k_{11} = (a+b) [k_{12} - \sqrt{2} \psi_3(0) + \varphi_1'(0)].$$

Теперь рассмотрим случай, когда вместо условия (1.5) берется условие (1.6), т. е. имеет место группа условий $\{(1.2), (1.3), (1.6), (1.7)\}$. Подставляя (1.21) в (1.6) и (1.7), соответственно находим $F(x)$ и $\omega_2(z)$:

$$F(x) = \psi_2\left(\frac{x+1}{2}\right) - \Phi(1), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.33)$$

а функция $\omega_2(z)$ определяется формулой (1.23). Тогда из (1.21) получаем

$$u_2(x, y) = \Phi(x-y) - \Phi(1) + Q(x, y), \quad (1.34)$$

где

$$Q(x, y) = \psi_2\left(\frac{x+y+1}{2}\right) + H(x, y).$$

Из (1.34) при $y \rightarrow -0$ с учетом (1.11) и (1.12) находим

$$\nu(x) = \beta(x) - \tau'(x), \quad (1.35)$$

где

$$\beta(x) = \frac{\partial Q(x, 0)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, 0)}{\partial y}.$$

В уравнении (1.27), переходя к пределу при $y \rightarrow +0$ с учетом (1.11), (1.12), (1.13), (1.26) и (1.35), получаем

$$(a-b)\tau''(x) + (a-b+c)\tau'(x) + c\tau(x) = \delta(x) + k_{21}, \quad (1.36)$$

где

$$\delta(x) = a\beta(x) - b\beta'(x) + \int_0^x [c\beta(t) - b\lambda(t)] dt$$

— известная функция; $k_{21} = h(0) - b\tau'(0) + c\tau(0)$ — неизвестная константа, подлежащая определению.

Пусть $a \neq b$, тогда уравнение (1.36) решаем при условиях (1.29). Это решение имеет вид

а) при $c \neq 0$ и $c \neq a-b \neq 0$

$$\tau(x) = \frac{1}{b-a+c} \int_0^x \left\{ \exp(t-x) - \exp\left[\frac{c(x-t)}{b-a}\right] \right\} \delta(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{c} k_{21} + k_{22} \exp(-x) + k_{23} \exp\left(\frac{cx}{b-a}\right), \quad (1.37)$$

где

$$k_{23} = \left[\frac{c(e-1)}{e(b-a)} - \exp\left(\frac{c}{b-a}\right) + 1 \right]^{-1} \left\{ \varphi_1(0) - \varphi_2(0) + \right. \\ \left. + \frac{e-1}{e} [V\sqrt{2}\psi_3(0) - \varphi_1'(0)] + \frac{1}{b-a+c} \int_0^1 [\exp(t-1) - \right. \\ \left. - \exp\left(\frac{c-ct}{b-a}\right)] \delta(t) dt \right\}, \quad k_{22} = \frac{c}{b-a} k_{23} - V\sqrt{2}\psi_3(0) + \varphi_1'(0), \\ k_{21} = c [\varphi_1(0) - k_{22} - k_{23}];$$

б) при $c=a-b \neq 0$

$$\tau(x) = \frac{1}{a-b} \int_0^x (x-t) \exp(t-x) \delta(t) dt + \\ + \frac{1}{a-b} k_{21} + (k_{23} + k_{22}x) \exp(-x), \quad (1.38)$$

где

$$k_{23} = \frac{e}{e-2} \left\{ \varphi_1(0) - \varphi_2(0) + \frac{1}{e} [V\sqrt{2}\psi_3(0) - \varphi_1'(0)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{a-b} \int_0^1 (1-t) \exp(t-1) \delta(t) dt \right\},$$

$$k_{22} = k_{23} + V\sqrt{2}\psi_3(0) - \varphi_1'(0), \quad k_{21} = (a-b) [\varphi_1(0) - k_{23}];$$

в) при $c=0$ и $a \neq b$

$$\tau(x) = \frac{1}{b-a} \int_0^x [\exp(t-x) - 1] \delta(t) dt + \\ + \frac{1-x}{b-a} k_{21} + k_{22} \exp(-x) + k_{23}, \quad (1.39)$$

где

$$k_{23} = \varphi_1(0) + \sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0),$$

$$k_{22} = e \left\{ \varphi_2(0) - \varphi_1(0) - \sqrt{2} \psi_3(0) + \varphi_1'(0) - \right. \\ \left. - \frac{1}{b-a} \int_0^1 [\exp(t-1) - 1] \delta(t) dt \right\},$$

$$k_{21} = (b-a) [\varphi_1'(0) - \sqrt{2} \psi_3(0) - k_{22}].$$

Пусть $a=b$ и $c \neq 0$, тогда из (1.36) имеем

$$\tau'(x) + \tau(x) = \frac{1}{c} [\delta(x) + k_{21}].$$

Это уравнение решаем при первых двух из условий (1.29).

$$\tau(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \exp(t-x) \delta(t) dt + \frac{1}{c} k_{21} + k_{22} \exp(-x), \quad (1.40)$$

где

$$k_{22} = \frac{e}{e-1} [\varphi_1(0) - \varphi_2(0) + \frac{1}{c} \int_0^1 \exp(t-1) \delta(t) dt,$$

$$k_{21} = c [\varphi_1(0) - k_{22}].$$

Пусть теперь $a=b$ и $c=0$, тогда из (1.36) следует, что $\delta(x) + k_{21} = 0$ и невозможно получить уравнение относительно неизвестной функции $\tau(x)$. Поэтому в случае $a=b$ и $c=0$ необходимо задавать только группу условий $\{(1.2), (1.3), (1.5), (1.7)\}$, т. е. условия (1.5) и (1.6) неравноправны. Таким образом, в случае условий $\{(1.2), (1.3), (1.5), (1.7)\}$ функция $\tau(x)$ определяется по формулам: (1.30) при $c \neq 0$ и $c \neq -(a+b)$; (1.31) при $c = -(a+b)$; (1.32) при $c=0$, а в случае условий $\{(1.2), (1.3), (1.6), (1.7)\}$ — по формулам: (1.37) при $c \neq 0$ и $c \neq a-b \neq 0$; (1.38) при $c = a-b \neq 0$; (1.39) при $c=0$ и $a \neq b$; (1.40) при $c \neq 0$ и $a=b$.

Функцию $\nu(x)$ определяем по формуле (1.25) в случае условий $\{(1.2), (1.3), (1.5), (1.7)\}$ и по формуле (1.35) в случае условий $\{(1.2), (1.3), (1.6), (1.7)\}$.

Итак, при $y \rightarrow +0$ из (1.19) следует

$$\omega_1(bx) = [\tau''(x) - \nu(x)] \exp\left(\frac{cx}{2a}\right)$$

или

$$\omega_1(z) = \left[\tau''\left(\frac{z}{b}\right) - \nu\left(\frac{z}{b}\right) \right] \exp\left(\frac{cz}{2ab}\right), \quad (1.41)$$

где $z = bx - ay$, $0 \leq z \leq b$. Здесь функция $\omega_1(z)$ определилась в промежутке $0 \leq z \leq b$. Необходимо было найти ее при $-ah \leq z \leq b$, $(x, y) \in D_1$. Для определения функции $\omega_1(z)$ в промежутке $-ah \leq z \leq 0$ воспользуемся условием (1.3) и первым условием из (1.2). Учитывая это обстоятельство, при $x \rightarrow +0$ из (1.19) находим

$$\omega_1(-ay) = [\varphi_3(y) - \varphi_1'(y)] \exp\left(\frac{cy}{2b}\right)$$

или

$$\omega_1(z) = \left[\varphi_3\left(-\frac{z}{a}\right) - \varphi_1'\left(-\frac{z}{a}\right) \right] \exp\left(-\frac{cz}{2ab}\right), \quad (1.42)$$

где $z = bx - ay$, $-ah \leq z \leq 0$.

Из (1.41) и (1.42) при $z=0$ следует

$$\tau''(0) - \nu(0) = \varphi_3(0) - \varphi_1'(0), \quad (1.43)$$

$$a[\tau'''(0) - \nu'(0)] + b[\varphi_3'(0) - \varphi_1''(0)] + c[\varphi_3(0) - \varphi_1'(0)] = 0. \quad (1.44)$$

При выполнении определенных условий согласования между функциями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ имеют место равенства (1.43) и (1.44), и как функция $\omega_1(z)$, так и $\omega_1'(z)$ будут непрерывными вдоль прямой $bx - ay = 0$, т. е. уравнение (1.1) при $y > 0$ выполняется в точках этой прямой.

Итак, функция $\omega_1(z)$ определена полностью в области D_1 , тем самым и правая часть уравнения (1.19). Таким образом, для нахождения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к первой краевой задаче для уравнения (1.19), решение которой существует и единственно.

Чтобы определить функцию $u_2(x, y)$ в области D_2 в случае условий {(1.2), (1.3), (1.5), (1.7)} в (1.24) положим $y=0$, тогда получаем равенство

$$F(x) - F(0) = \tau(x) - P(x, 0).$$

Подставляя его в (1.24), находим

$$u_2(x, y) = \tau(x + y) - P(x + y, 0) + P(x, y).$$

Точно так же в случае условий {(1.2), (1.3), (1.6), (1.7)} имеем

$$u_2(x, y) = \tau(x - y) - Q(x - y, 0) + Q(x, y).$$

Из последних двух равенств следует, что при однородных условиях $u_2(x, y) \equiv 0$ в D_2 , т. е. задача D_{abc} в случае 1) имеет единственное решение.

3. Рассмотрим случай 2. В силу $1 < b/a < +\infty$ без ограничения общности можно положить $a > 0$ и $b > 0$. Тогда выполняется неравенство $0 < (b+a)/2 < b$. Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq bx - ay \leq (b+a)/2, (x, y) \in D_{21}, \\ (b+a)/2 &\leq bx - ay \leq b, (x, y) \in D_{22}; \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

здесь D_{21} — треугольник с вершинами $A(0, 0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{b+a}{2b}, 0\right)$; D_{22} — треугольник с вершинами $B(1, 0)$, C , E , а $D_{21} \cup CE \cup D_{22} = D_2$.

При выполнении первого из неравенств (1.45), как и в случае 1), из общего решения (1.21) уравнения (1.20) в силу условий (1.5) [(1.6)] и (1.7) определяем $\Phi(x)$ [$F(x)$] и $\omega_2(z)$ по формулам (1.22) [(1.33)] и (1.23) соответственно. При выполнении второго из неравенств (1.45), подставляя (1.21) в (1.8), определяем функцию $\omega_2(z)$ по формуле

$$\omega_2(z) = -\sqrt{2} \psi'_4 \left(\frac{z-a}{b-a} \right) \exp \left\{ \frac{c}{2ab} \left[\frac{b+a}{b-a} (z-a) - a \right] \right\}, \quad (1.46)$$

где $z = bx - ay$, $(b+a)/2 \leq z \leq b$, причем должно выполняться равенство

$$\Phi'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \psi'_4 \left(\frac{1}{2} \right).$$

Если выполняются равенства

$$\psi'_3 \left(\frac{1}{2} \right) = -\psi'_4 \left(\frac{1}{2} \right), \quad (1.47)$$

$$(b-a) \psi'_3 \left(\frac{1}{2} \right) + (b+a) \psi'_4 \left(\frac{1}{2} \right) = 2c \psi'_3 \left(\frac{1}{2} \right),$$

то функции $\omega_2(z)$ и $\omega_2^1(z)$ будут непрерывными и в точках прямой $bx - ay = (b+a)/2$, т. е. уравнение (1.1) при $y < 0$ выполняется и в точках этой прямой.

Рассуждая как и в случае 1), находим функцию $\tau(x)$ в случае условий {(1.2), (1.3), (1.5), (1.7), (1.8)} по формулам: (1.30) при $c \neq 0$ и $c \neq -(a+b)$; (1.31) при $c = -(a+b)$; (1.32) при $c = 0$, а в случае условий {(1.2), (1.3), (1.6), (1.7), (1.8)} по формулам: (1.37) при $c \neq 0$ и $c \neq a-b$; (1.38) при $c = a-b$; (1.39) при $c = 0$. Затем определяем функцию $\nu(x)$ по формуле (1.25) в случае условий {(1.2), (1.3), (1.5), (1.7), (1.8)} и по формуле

(1.35) в случае условий $\{(1.2), (1.3), (1.6), (1.7), (1.8)\}$; дальнейшее исследование проводится аналогично случаю 1).

4. Рассмотрим случай 5). Учитывая (1.18), вместо систем уравнений (1.14) и (1.15) можем рассмотреть уравнения

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(x) \exp\left(-\frac{c}{b}y\right), \quad (1.48)$$

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_2(x) \exp\left(-\frac{c}{b}y\right). \quad (1.49)$$

Общее решение уравнения (1.49) имеет вид

$$u_2(x, y) = F(x + y) + \Phi(x - y) + \\ + \frac{1}{4} \int_0^{x+y} d\xi \int_1^{x-y} \omega_2\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \exp\left[\frac{c(\eta - \xi)}{2b}\right] d\eta, \quad (1.50)$$

где F и Φ — дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Подставляя (1.50) в (1.5), (1.7) и (1.8), соответственно находим

$$\Phi(x) = \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) - F(0), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.51)$$

$$\omega_2(x) = \sqrt{2} \psi_3'(x) \exp\left(-\frac{cx}{b}\right), \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad (1.52)$$

$$\omega_2(x) = -\sqrt{2} \psi_4'(x) \exp\left[\frac{c(x-1)}{b}\right], \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (1.53)$$

причем должны выполняться равенства

$$F'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_3\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Phi'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_4\left(\frac{1}{2}\right).$$

Из последнего равенства и (1.51) следует

$$\psi_1'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_4\left(\frac{1}{2}\right),$$

а из (1.52) и (1.53) при $x = \frac{1}{2}$ получаем (1.47).

Учитывая (1.51), (1.52), из (1.50) имеем

$$u_2(x, y) = F(x + y) - F(0) + P(x, y), \quad (1.54)$$

где

$$P(x, y) = \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) + H_1(x, y),$$

$$H_1(x, y) = \begin{cases} N_1(x, y) & \text{при } (x, y) \in D_{21}, \\ N_2(x, y) & \text{при } (x, y) \in D_{22}, \end{cases}$$

$$N_1(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{x+y} \left[\psi_3\left(\frac{\xi+x-y}{2}\right) - \psi_3\left(\frac{1}{2}\right) \right] \exp\left(-\frac{c\xi}{b}\right) d\xi - \\ - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^{1-x-y} \left[\psi_4\left(\frac{x+y+\eta}{2}\right) - \psi_4\left(\frac{1}{2}\right) \right] \exp\left[\frac{c(\eta-1)}{b}\right] d\eta,$$

$$N_2(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{1-x+y} \left[\psi_3\left(\frac{\xi+x-y}{2}\right) - \psi_3\left(\frac{1}{2}\right) \right] \exp\left(-\frac{c\xi}{b}\right) d\xi - \\ - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^{x-y} \left[\psi_4\left(\frac{x+y+\eta}{2}\right) - \psi_4\left(\frac{1}{2}\right) \right] \exp\left[\frac{c(\eta-1)}{b}\right] d\eta,$$

а D_{21} и D_{22} — те же треугольники, что и в случае 2) при $a=0$.

Учитывая (1.11) и (1.12), из (1.54) при $y \rightarrow 0$ получаем формулу (1.25), а из (1.49) при $y \rightarrow 0$ с учетом (1.11) и (1.13) имеем

$$\mu(x) = \tau''(x) - \omega_2(x). \quad (1.55)$$

В уравнении (1.27) полагая $a=0$ и устремляя y к нулю, с учетом (1.11), (1.12), (1.13), (1.25), (1.55) получаем

$$b\tau''(x) - (b-c)\tau'(x) - c\tau(x) = \gamma(x) + k_{11}, \quad (1.56)$$

где

$$\gamma(x) = b\alpha'(x) - \int_0^x [b\omega_2(t) + c\alpha(t)] dt$$

— известная функция, а $k_{11} = h(0) - b\tau'(0) - c\tau(0)$ — неизвестная константа, подлежащая определению.

Как и в случае 1), уравнение (1.56) решаем при условиях (1.29), т. е. функцию $\tau(x)$ определяем по формулам: (1.30) при $c \neq 0$ и $c \neq -b$; (1.31) при $c = -b$; (1.32) при $c = 0$, полагая в этих формулах $a=0$.

Теперь рассмотрим случай группы условий $\{(1.2), (1.6), (1.7), (1.8)\}$. Подставляя (1.50) в (1.6), (1.7) и (1.8), соответственно получаем (1.33), (1.52), (1.53), причем должны выполняться равенства $\psi_2'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\psi_3\left(\frac{1}{2}\right)$ и (1.47). Тогда имеем

$$u_2(x, y) = \Phi(x-y) - \Phi(1) + Q(x, y), \quad (1.57)$$

где

$$Q(x, y) = \psi_2 \left(\frac{x+y+1}{2} \right) + H_1(x, y).$$

Из (1.57) при $y \rightarrow -0$ получаем (1.35).

В уравнении (1.27), полагая $a=0$ и $y \rightarrow +0$, с учетом (1.11), (1.12); (1.13), (1.35), (1.55) имеем

$$b\tau''(x) + (b-c)\tau'(x) - c\tau(x) = -[\delta(x) + k_{21}], \quad (1.58)$$

где

$$\delta(x) = -b\beta'(x) + \int_0^x [c\beta(t) - b\omega_2(t)] dt$$

— известная функция, а $k_{21} = h(0) - b\tau'(0) + c\tau(0)$ — неизвестная константа, подлежащая определению.

Уравнение (1.58) решаем при условиях (1.29). Тогда $\tau(x)$ определяем по формулам: (1.37) при $c \neq 0$ и $c \neq -b$; (1.38) при $c = -b$; (1.39) при $c = 0$, полагая в этих формулах $a = 0$.

Теперь, как и в случае 1), находим функцию $v(x)$. Далее в уравнении (1.48), полагая $y \rightarrow +0$, определяем функцию $\omega_1(x)$:

$$\omega_1(x) = \tau''(x) - v(x).$$

Итак, для определения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к первой краевой задаче для неоднородного уравнения теплопроводности, которая допускает единственное решение, а функцию $u_2(x, y)$ в области D_2 находим как и раньше.

Отметим, что задача D_{010} была исследована в главе 3 с помощью представления общего решения (случай $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $\{(1.2), (1.5), (1.7), (1.8)\}$).

5. Наконец, рассмотрим случай 6). Из всевозможных задач для этого случая ограничимся рассмотрением задачи (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), (1.7).

Учитывая (1.17), первые уравнения систем (1.14) и (1.15) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(y) \exp \left(-\frac{c}{a} x \right), \quad (1.59)$$

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_2(y) \exp \left(-\frac{c}{a} x \right). \quad (1.60)$$

Общее решение уравнения (1.60) имеет вид

$$u_2(x, y) = F(x+y) + \Phi(x-y) + \\ + \frac{1}{4} \int_0^{x+y} d\xi \int_1^{x-y} \omega_2 \left(\frac{\xi - \eta}{2} \right) \exp \left[-\frac{c(\xi + \eta)}{2a} \right] d\eta. \quad (1.61)$$

Подставляя (1.61) в (1.5) и (1.7), соответственно получаем (1.51) и

$$\omega_2(y) = \sqrt{2} \psi'_3(-y) \exp\left(-\frac{c}{a} y\right), \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq 0.$$

В силу последнего равенства и (1.51) из (1.61) следует (1.54), где

$$P(x, y) = \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{x+y} \left[\psi_3\left(\frac{x-y-\xi}{2}\right) - \psi_3\left(\frac{1-\xi}{2}\right) \right] \exp\left(-\frac{c}{a} \xi\right) d\xi.$$

Учитывая (1.11) и (1.12), из (1.54) при $y \rightarrow -0$ имеем первое соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из области D_2 , по формуле (1.25).

В уравнении (1.59) переходя к пределу при $x \rightarrow +0$, с учетом (1.2) и (1.3) определяем функцию $\omega_1(y)$:

$$\omega_1(y) = \varphi_3(y) - \varphi_1(y). \quad (1.62)$$

Интегрируя уравнение (1.59) по x от 0 до x и переходя к пределу при $y \rightarrow +0$, получаем второе соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из области D_1 :

а) при $c \neq 0$

$$\tau'(x) - \int_0^x v(t) dt = \frac{a}{c} \omega_1(0) \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{a} x\right) \right] + \tau'(0);$$

б) при $c=0$

$$\tau'(x) - \int_0^x v(t) dt = \omega_1(0) x + \tau'(0),$$

где $\omega_1(0)$ определяется из (1.62).

Исключая $v(x)$ из этих уравнений и (1.25), получаем: при $c \neq 0$

$$\tau'(x) - \tau(x) = \frac{a}{c} \omega_1(0) \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{a} x\right) \right] - \int_0^x \alpha(t) dt + m_{11} \equiv \sigma_1(x) + m_{11};$$

при $c=0$

$$\tau'(x) - \tau(x) = \omega_1(0) x - \int_0^x \alpha(t) dt + m_{21} \equiv \sigma_2(x) + m_{21}.$$

где m_{11} , m_{21} — неизвестные константы, подлежащие определению. Решая эти уравнения при первых двух из условий (1.29), соответственно получаем:
при $c \neq 0$

$$\tau(x) = \int_0^x \exp(x-t) \sigma_1(t) dt - m_{11} + m_{12} \exp x;$$

при $c=0$

$$\tau(x) = \int_0^x \exp(x-t) \sigma_2(t) dt - m_{21} + m_{22} \exp x,$$

где

$$m_{i1} = \frac{1}{e-1} \left[\varphi_2(0) - e\varphi_1(0) - \int_0^1 \exp(1-t) \sigma_i(t) dt \right],$$

$$m_{i2} = \varphi_1(0) + m_{i1}, \quad i = 1, 2.$$

Итак, для определения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к первой краевой задаче для неоднородного уравнения теплопроводности, а функция $u_2(x, y)$ в области D_2 определяется как и прежде.

§ 2. Задача D_{abc} с разрывными условиями склеивания

Рассмотрим задачу D_{abc} с общими разрывными условиями склеивания. В этом случае условие I) задачи D_{abc} заменяется на следующее: функция $u(x, y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$, а условия II) и III) остаются неизменными. Задача D_{abc} в этом случае имеет единственное решение. В самом деле, пусть в случае б) выполняются условия

$$u(x, +0) = \alpha_1(x) u(x, -0) + \gamma_1(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u_y(x, +0) = \beta_1(x) u_y(x, -0) + \alpha_2(x) u(x, -0) +$$

$$+ \gamma_2(x), \quad 0 < x < 1,$$

а в случаях 1)–5), кроме того, и условие

$$u_{yy}(x, +0) = \delta_1(x) u_{yy}(x, -0) + \beta_2(x) u_y(x, -0) +$$

$$+ \alpha_3(x) u(x, -0) + \gamma_3(x), \quad 0 < x < 1,$$

где $\alpha_1(x)$, $\gamma_1(x) \in C^3$, $\beta_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\gamma_2(x) \in C^2$, $\delta_1(x)$, $\beta_2(x)$, $\alpha_3(x)$, $\gamma_3(x) \in C^0$ — заданные функции, причем $\alpha_1(x) \beta_1(x) \delta_1(x) \neq 0$.

Введем обозначения

$$u(x, +0) = \tau_1(x), \quad u(x, -0) = \tau_2(x),$$

$$u_y(x, +0) = \nu_1(x), \quad u_y(x, -0) = \nu_2(x),$$

$$u_{yy}(x, +0) = \mu_1(x), \quad u_{yy}(x, -0) = \mu_2(x).$$

Тогда вместо (1.11), (1.12), (1.13) получаем:
в случае 6)

$$\tau_1(x) = \alpha_1(x) \tau_2(x) + \gamma_1(x), \quad (2.1)$$

$$\nu_1(x) = \beta_1(x) \nu_2(x) + \alpha_2(x) \tau_2(x) + \gamma_2(x), \quad (2.2)$$

в случаях 1)–5), кроме того, и

$$\mu_1(x) = \delta_1(x) \mu_2(x) + \beta_2(x) \nu_2(x) + \alpha_3(x) \tau_2(x) + \gamma_3(x), \quad (2.3)$$

а вместо (1.25), (1.35) и (1.26) —

$$\nu_2(x) = \tau_2'(x) - \alpha(x), \quad (2.4)$$

$$\nu_2(x) = \beta(x) - \tau_2'(x), \quad (2.5)$$

$$\mu_2(x) = \tau_2''(x) - \lambda(x). \quad (2.6)$$

Сначала рассмотрим случаи 1)–5). Из (1.27) при $y \rightarrow +0$ получаем

$$a\tau_1''(x) + b\nu_1'(x) - a\nu_1(x) + c\tau_1'(x) = \int_0^x [b\mu_1(t) + c\nu_1(t)] dt + k_1, \quad (2.7)$$

где $k_1 = h(0)$ — неизвестная константа, подлежащая определению.

Для группы условий с участием (1.5), принимая во внимание (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) и (2.6), из (2.7) имеем

$$\begin{aligned} p_{11}(x) \tau_2''(x) + q_{11}(x) \tau_2'(x) + s_{11}(x) \tau_2(x) &= A_1(x) + k_1 + \\ + \int_0^x [p_{12}(t) \tau_2''(t) + q_{12}(t) \tau_2'(t) + s_{12}(t) \tau_2(t)] dt, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$p_{11}(x) = a\alpha_1(x) + b\beta_1(x), \quad p_{12}(t) = b\delta_1(t),$$

$$q_{11}(x) = 2a\alpha_1'(x) + b\beta_1'(x) + b\alpha_2(x) - a\beta_1(x) + c\alpha_1(x),$$

$$s_{11}(x) = a\alpha_1''(x) + b\alpha_2'(x) - a\alpha_2(x) + c\alpha_1'(x),$$

$$q_{12}(t) = b\beta_2(t) + c\beta_1(t), \quad s_{12}(t) = b\alpha_3(t) + c\alpha_2(t),$$

$$A_1(x) = \int_0^x [b\gamma_3(t) - c\beta_1(t) \alpha(t) + c\gamma_2(t) - b\delta_1(t) \lambda(t) -$$

$$-b\beta_2(t)\alpha(t)]dt - a\gamma_1''(x) + b\beta_1'(x)\alpha(x) + b\beta_1(x)\alpha'(x) - \\ - b\gamma_2'(x) - a\beta_1(x)\alpha(x) + a\gamma_2(x) - c\gamma_1'(x).$$

Пусть $p_{11}(x) \neq 0$. Тогда уравнение (2.8) решаем при условиях

$$\tau_2(0) = t_0, \quad \tau_2(1) = t_1, \quad \tau_2'(0) = t_2, \quad (2.9)$$

где

$$t_0 = [\varphi_1(0) - \gamma_1(0)]/\alpha_1(0), \quad t_1 = [\varphi_2(0) - \gamma_1(1)]/\alpha_1(1), \\ t_2 = \{ \alpha_1(0) [\varphi_1'(0) - \gamma_2(0)] - \alpha_2(0) [\varphi_1(0) - \\ - \gamma_1(0)] \} / [\alpha_1(0)\beta_1(0)] + \alpha(0).$$

Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \tau_2''(x) &= z(x), \quad \tau_2'(x) = \int_0^x z(t)dt + t_2, \\ \tau_2(x) &= \int_0^x (x-t)z(t)dt + t_2x + t_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

уравнение (2.8) перепишем в виде

$$z(x) - \int_0^x K_1(t, x)z(t)dt = B_1(x) + \frac{k_1}{p_{11}(x)}, \quad (2.11)$$

где

$$K_1(t, x) = \left\{ p_{12}(t) - q_{11}(x) - s_{11}(x)(x-t) + \right. \\ \left. + \int_t^x [q_{12}(\lambda) + s_{12}(\lambda)(\lambda-t)]d\lambda \right\} / p_{11}(x), \\ B_1(x) = \left\{ \int_0^x [t_2q_{12}(t) + t_2ts_{12}(t) + t_0s_{12}(t)]dt - \right. \\ \left. - t_2[q_{11}(x) + xs_{11}(x)] + A_1(x) - t_0s_{11}(x) \right\} / p_{11}(x).$$

Так как ядро и правая часть уравнения (2.11) непрерывно дифференцируемы, то оно допускает единственное решение в классе непрерывно дифференцируемых функций. Его решение запишем в виде

$$z(x) = B_1(x) + \frac{k_1}{p_{11}(x)} + \int_0^x \Gamma_1(t, x) \left[B_1(t) + \frac{k_1}{p_{11}(t)} \right] dt,$$

где $\Gamma_1(t, x)$ — резольвента ядра $K_1(t, x)$.

Подставляя $z(x)$ в последнее равенство из (2.10), находим

$$\tau_2(x) = Q_1(x) + k_1 R_1(x),$$

где

$$R_1(x) = \int_0^x (x-t) \left[\frac{1}{p_{11}(t)} + \int_0^t \frac{\Gamma_1(\lambda, t)}{p_{11}(\lambda)} d\lambda \right] dt,$$

$$Q_1(x) = \int_0^x (x-t) \left[B_1(t) + \int_0^t \Gamma_1(\lambda, t) B_1(\lambda) d\lambda \right] dt + t_2 x + t_0.$$

Постоянную k_1 определяем из второго условия (2.9), т. е.

$$k_1 = [t_1 - Q_1(1)]/R_1(1), \text{ если } R_1(1) \neq 0.$$

Пусть $p_{11}(x) = 0$, тогда дифференцируя уравнение (2.8), имеем

$$\begin{aligned} [q_{11}(x) - p_{12}(x)] \tau_2''(x) + [q_{11}'(x) + s_{11}(x) - \\ - q_{12}(x)] \tau_2'(x) + [s_{11}'(x) - s_{12}(x)] \tau_2(x) = A_1'(x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Предположим, что $q_{11}(x) - p_{12}(x) \neq 0$, тогда уравнение (2.12) будем решать при первых двух условиях из (2.9). В силу (2.10) уравнение (2.12) можно переписать в виде

$$z(x) - \int_0^x K_2(t, x) z(t) dt = R_2(x) t_2 + Q_2(x),$$

где

$$R_2(x) = \frac{q_{12}(x) - s_{11}(x) - q_{11}'(x) + x [s_{12}(x) - s_{11}'(x)]}{q_{11}(x) - p_{12}(x)},$$

$$Q_2(x) = \frac{A_1'(x) + t_0 [s_{12}(x) - s_{11}'(x)]}{q_{11}(x) - p_{12}(x)},$$

$$K_2(t, x) = R_2(x) + t \frac{s_{11}'(x) - s_{12}(x)}{q_{11}(x) - p_{12}(x)},$$

а t_2 — неизвестная константа, подлежащая определению. Отсюда, найдя $z(x)$ и подставляя ее в последнее равенство из (2.10), получаем

$$\tau(x) = R_3(x) t_2 + Q_3(x),$$

здесь

$$R_3(x) = x + \int_0^x (x-t) \left[R_2(t) + \int_0^t \Gamma_2(z, t) R_2(z) dz \right] dt,$$

$$Q_3(x) = t_0 + \int_0^x (x-t) \left[Q_2(t) + \int_0^t \Gamma_2(z, t) Q_2(z) dz \right] dt,$$

а $\Gamma_2(t, x)$ — резольвента ядра $K_2(t, x)$. Постоянную t_2 определяем из второго условия (2.9), т. е.

$$t_2 = [t_1 - Q_3(1)]/R_3(1), \text{ если } R_3(1) \neq 0.$$

Пусть $q_{11}(x) - p_{12}(x) = 0$. Тогда, если $q'_{11}(x) + s_{11}(x) - q_{12}(x) \neq 0$, то уравнение (2.12) линейное. Это уравнение решается при условии $\tau_2(0) = t_0$. Если $q'_{11}(x) + s_{11}(x) - q_{12}(x) = 0$, но $s'_{11}(x) - s_{12}(x) \neq 0$, то из (2.12) находим $\tau_2(x) = A'_1(x)/[s'_{11}(x) - s_{12}(x)]$. Если же и $s'_{11}(x) - s_{12}(x) = 0$, то из (2.12) следует, что $A'_1(x) = 0$, и уравнение относительно неизвестной функции $\tau_2(x)$ получить нельзя.

В случае группы условий с участием (1.6), учитывая (2.1), (2.2), (2.3), (2.5) и (2.6), из (2.7) получаем

$$\begin{aligned} p_{21}(x) \tau_2''(x) + q_{21}(x) \tau_2'(x) + s_{21}(x) \tau_2(x) = A_2(x) + \\ + k_1 + \int_0^x [p_{22}(t) \tau_2''(t) + q_{22}(t) \tau_2'(t) + s_{22}(t) \tau_2(t)] dt, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} p_{21}(x) &= a\alpha_1(x) - b\beta_1(x), \quad p_{22}(t) = b\delta_1(t), \\ q_{21}(x) &= 2a\alpha'_1(x) - b\beta'_1(x) + ba_2(x) + a\beta_1(x) + cx_1(x), \\ s_{21}(x) &= a\alpha''_1(x) + b\alpha'_2(x) - a\alpha_2(x) + c\alpha'_1(x), \\ q_{22}(t) &= -[b\beta_2(t) + c\beta_1(t)], \quad s_{22}(t) = b\alpha_3(t) + c\alpha_2(t), \\ A_2(x) &= a\beta_1(x)\beta(x) - a\gamma'_1(x) - b\beta'_1(x)\beta(x) - b\beta_1(x)\beta'(x) - \\ &- b\gamma'_2(x) + a\gamma_2(x) - c\gamma'_1(x) + \int_0^x [b\beta_3(t)b(t) - \\ &- b\delta_1(t)\lambda(t) + b\gamma_3(t) + c\beta_1(t)\beta(t) + c\gamma_2(t)] dt. \end{aligned}$$

Как и раньше, уравнение (2.13) решаем при условиях $\tau_2(0) = t_0$, $\tau_2(1) = t_1$, $\tau_2'(1) = t_3$, где

$$t_3 = \beta(0) - \left\{ \alpha_1(1) [\varphi_2'(0) - \gamma_2(1)] - \alpha_2(1) [\varphi_2(0) - \gamma(1)] \right\} / [\alpha_1(1) \beta_1(1)],$$

и находим функцию $\tau_2(x)$.

В случае группы условий с участием (1.5), подставляя значение $\tau_2(x)$ в (2.4), а в случае группы условий с участием условия (1.6) — в (2.5), определяем функцию $v_2(x)$, затем по формулам (2.1) и (2.2) находим функции $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$. Дальнейшее исследование проводится как и при непрерывных условиях склеивания.

Теперь рассмотрим случай 6). Из всевозможных задач для этого случая ограничимся рассмотрением задачи (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), (1.7) с общими разрывными условиями склеивания (2.1) и (2.2).

Как и в случае с непрерывными условиями склеивания при $y \rightarrow -0$ из (1.24) имеем соотношение между $\tau_2(x)$ и $v_2(x)$, принесенное из области D_2 , по формуле (2.4).

Интегрируя уравнение (1.59) по x от 0 до x и переходя к пределу при $y \rightarrow +0$, получаем соотношение между $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$, принесенное из области D_1 :

1) при $c \neq 0$

$$\tau_1'(x) - \int_0^x v_1(t) dt = \frac{a}{c} \omega_1(0) \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{a} x\right) \right] + \tau_1'(0);$$

2) при $c=0$

$$\tau_1'(x) - \int_0^x v_1(t) dt = \omega_1(0) x + \tau_1'(0),$$

где $\omega_1(0)$ определяется из (1.62), а $\tau_1'(0)$ — неизвестная константа, подлежащая определению.

Подставляя (2.1), (2.2) и (2.4) в последние уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \tau_2'(x) + p_{31}(x) \tau_2(x) - \int_0^x [p_{32}(t, x) \tau_2'(t) + \\ + q_{32}(t, x) \tau_2(t)] dt = A_{31}(x) + \frac{\tau_1'(0)}{a_1(x)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned}
 p_{31}(x) &= \alpha_1'(x)/\alpha_1(x), \quad p_{32}(t, x) = \beta_1(t)/\alpha_1(x), \\
 q_{32}(t, x) &= \alpha_2(t)/\alpha_1(x), \quad A_{3i}(x) = \frac{1}{\alpha_1(x)} \int_0^x \left[\gamma_i(t) - \right. \\
 &\quad \left. - \beta_1(t) \alpha(t) \right] dt + \sigma_{i+2}(x)/\alpha_1(x) - \gamma_i'(x)/\alpha_1(x), \quad i = 1, 2, \\
 \sigma_3(x) &= \frac{a}{c} \omega_1(0) \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{a}x\right) \right] \quad \text{при } c \neq 0, \\
 \sigma_4(x) &= \omega_1(0)x \quad \text{при } c = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнение (2.14) решаем при первых двух условиях (2.9). Введя обозначения

$$\tau_2'(x) = z(x), \quad \tau_2(x) = \int_0^x z(t) dt + t_0, \quad (2.15)$$

уравнение (2.14) перепишем в виде

$$z(x) - \int_0^x K_3(t, x) z(t) dt = A_{4i}(x) + \frac{\tau_1'(0)}{\alpha_1(x)},$$

где

$$\begin{aligned}
 K_3(t, x) &= p_{32}(t, x) - p_{31}(x) + \int_t^x q_{32}(\lambda, x) d\lambda, \\
 A_{4i}(x) &= A_{3i}(x) + \left[\int_0^x q_{32}(t, x) dt - p_{31}(x) \right] t_0.
 \end{aligned}$$

Решая это уравнение, находим

$$z(x) = A_{4i}(x) + \frac{\tau_1'(0)}{\alpha_1(x)} + \int_0^x \Gamma_3(t, x) \left[A_{4i}(t) + \frac{\tau_1'(0)}{\alpha_1(t)} \right] dt,$$

где $\Gamma_3(t, x)$ — резольвента ядра $K_3(t, x)$.

Подставляя $z(x)$ в последнее из равенств (2.15), имеем

$$\tau_2(x) = A_{5i}(x) + A_6(x) \tau_1'(0), \quad (2.16)$$

где

$$A_{5i}(x) = \int_0^x \left[A_{4i}(t) + \int_0^t \Gamma_3(\lambda, t) A_{4i}(\lambda) d\lambda \right] dt + t_0,$$

$$A_6(x) = \int_0^x \left[\frac{1}{a_1(t)} + \int_0^t \frac{\Gamma_3(\lambda, t)}{a_1(\lambda)} d\lambda \right] dt.$$

Полагая в (2.16) $x = 1$ и учитывая $\tau_2(1) = t_1$, получаем $\tau_1'(0) = [t_1 - A_{51}(1)]/A_6(1)$, если $A_6(1) \neq 0$. Из (2.1) находим функцию $\tau_1(x)$.

Итак, для определения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к первой краевой задаче для неоднородного уравнения теплопроводности, а функция $u_2(x, y)$ в области D_2 определяется по формуле

$$u_2(x, y) = \tau_2(x + y) - P(x + y, 0) + P(x, y). \quad (2.17)$$

§ 3. Видоизмененная задача D_{abc}

Исследуем задачу D_{abc} с разрывными условиями склеивания, когда вместо условий (1.3) и (1.4) даются условия (1.9) и (1.10) соответственно.

Рассмотрим случаи 1) и 2), т. е. $0 < b/a < +\infty$. Здесь дополнительно потребуем, чтобы $\varphi_1(y) \in C^3[0, h]$. Как и в § 2, сначала определяем функции $\tau_i(x)$ и $v_i(x)$ ($i=1, 2$). Тогда функция $u_2(x, y)$ в области D_2 дается по формуле (2.17).

Для определения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к задаче (1.2), (1.9), $u_1(x, 0) = \tau_1(x)$, $u_{1y}(x, 0) = v_1(x)$ для уравнения (1.1).

Отметим, что в квадрате $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq l\}$ задача

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = f(x, t), \\ u(x, 0) = \tau(x), u_t(x, 0) = v(x), \\ u(0, t) = \varphi_1(t), u(l, t) = \varphi_2(t), u_x(0, t) = \varphi_3(t) \end{cases}$$

и аналогичная задача для уравнения

$$L_1^* \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right)^n u(x, t) = f(x, t)$$

изучена в работах [75, 76] с помощью тепловых потенциалов, где L_1^* — общий линейный параболический оператор второго порядка с переменными коэффициентами, а n — натуральное число.

Пусть пока область D_1 такова, что $h \leq b/a$. Полагая $au_{1x} + bu_{1y} + cu_1 = v(x, y)$, для неизвестной функции $v(x, y)$ получаем задачу

$$\begin{cases} v_{xx} - v_y = 0, \\ v(0, y) = \bar{\varphi}_1(y), \quad v(1, y) = \varphi(y), \\ v(x, 0) = \bar{\tau}(x), \end{cases}$$

где $\bar{\varphi}_1(y) = a\varphi_3(y) + b\varphi_1'(y) + c\varphi_1(y)$, $\bar{\tau}(x) = a\tau'(x) + b\tau(x) + c\tau(x)$, а $\varphi(y)$ — пока неизвестная функция.

Решение этой задачи имеет вид

$$v(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_0^y \bar{\varphi}_1(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y \varphi(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi \right], \quad (3.1)$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, т. е.

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp \left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] - \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp \left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\}.$$

Теперь в области D_1 решаем задачу

$$\begin{cases} au_{1x} + bu_{1y} + cu_1 = v(x, y), \\ u_1(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_1(x, 0) = \tau(x). \end{cases}$$

Ее решение можно записать в виде

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u_{11}(x, y), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{a}{b}y, \\ u_{12}(x, y), & \text{если } \frac{a}{b}y \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$u_{11}(x, y) = \frac{1}{b} \int_{y-\frac{b}{a}x}^y \exp \left[\frac{c}{b}(t-y) \right] v \left(\frac{bx-ay+at}{b}, t \right) dt +$$

$$+ \varphi_1 \left(\frac{ay - bx}{a} \right) \exp \left(-\frac{c}{a} x \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{b} y, \quad (3.3)$$

$$u_{12}(x, y) = \frac{1}{b} \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t - y) \right] v \left(\frac{bx - ay + at}{b}, t \right) dt + \\ + \tau \left(\frac{bx - ay}{b} \right) \exp \left(-\frac{c}{b} y \right), \quad \frac{a}{b} y \leq x \leq 1. \quad (3.4)$$

Переходя в формуле (3.4) к пределу при $x \rightarrow 1$ и учитывая (3.1), приходим к интегральному уравнению Вольтерра первого рода относительно $\varphi(y)$:

$$- \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t - y) \right] dt \int_0^t \varphi(\eta) G_\xi \left(\frac{b - ay + at}{b}, t; 1, \eta \right) d\eta = \\ = J_2(y) + J_3(y) + 2b \sqrt{\pi} \left[\varphi_2(y) - \tau \left(\frac{b - ay}{b} \right) \exp \left(-\frac{c}{b} y \right) \right], \quad (3.5)$$

где

$$J_2(y) = - \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t - y) \right] dt \int_0^t \bar{\varphi}_1(\eta) G_\xi \left(\frac{b - ay + at}{b}, t; 0, \eta \right) d\eta, \\ J_3(y) = - \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t - y) \right] dt \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G \left(\frac{b - ay + at}{b}, t; \xi, 0 \right) d\xi.$$

Чтобы получить интегральное уравнение Вольтерра второго рода, уравнение (3.5) следует продифференцировать. С этой целью левую часть уравнения (3.5) обозначим через $J_1(y)$. Дифференцируя функцию $J_1(y)$ дважды, имеем

$$J_1'(y) = 2 \sqrt{\pi} f(y) + \int_0^y K_4(y, \eta) f(\eta) d\eta + \varphi(0) r_1(y) + \varphi(0) r_2(y),$$

где

$$f(y) = \varphi'(y), \quad \varphi(0) = \bar{\tau}(1) = a\tau'(1) + b\tau(1) + c\tau(1), \\ K_4(y, \eta) = -\frac{2c}{b} \sqrt{\pi} - \frac{2a}{b\sqrt{y-\eta}} - \frac{2a}{b\sqrt{y-\eta}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{n^2}{y-\eta} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c^2}{b^2} \int_{\eta}^y dz \int_z^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] G_{\xi} \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 1, z \right) dt + \\
& + \frac{2ac}{b^2} \int_{\eta}^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] N \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 1, \eta \right) dt - \\
& - \frac{a^2}{b^2} \int_{\eta}^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] G_{\xi} \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 1, \eta \right) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1(y) = & -\frac{2a}{b\sqrt{y}} - \frac{2a}{b\sqrt{y}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{n^2}{y} \right) + \\
& + \frac{2ac}{b^2} \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] N \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 1, 0 \right) dt + \\
& + \frac{2a^2}{b^2} \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{z^2}{4} - \frac{c}{b} \sigma_1(y, z) \right] dz - \\
& - \frac{2a^3}{b^3} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{a^2(y-t)^2}{4b^2t} - \frac{c}{b} (y-t) \right] dt + \\
& + \frac{a^2}{b^2} \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] E_1(y, t) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2(y) = & -\frac{2c}{b} \sqrt{\pi} - \frac{c^2}{b^2} \int_0^y d\eta \int_{\eta}^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-\eta) \right] \times \\
& \times G_{\xi} \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 1, \eta \right) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(x, y; \xi, \eta) = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp \left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp \left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\alpha_1(y, z) = \frac{2bzy}{bz + \sqrt{b^2 z^2 + 4a^2 y}},$$

$$E_1(y, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a(y-t) + 2bn}{bt^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[a(y-t) + 2bn]^2}{4b^2 t} \right\},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}.$$

Теперь дифференцируя функцию $J_2(y)$ дважды, получаем

$$J_2''(y) = \int_0^y R_4(y, \eta) \bar{\varphi}_1'(\eta) d\eta + \bar{\varphi}_1(0) r_3(y) + \bar{\varphi}_1(0) r_4(y),$$

где

$$R_4(y, \eta) = -\frac{c^2}{b^2} \int_{\eta}^y dz \int_z^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] G_{\xi} \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 0, z \right) dt +$$

$$+ \frac{2ac}{b^2} \int_{\eta}^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] N \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 0, \eta \right) dt -$$

$$- \frac{a}{b} N(1, y; 0, \eta) + \frac{a^2}{b^2} \int_{\eta}^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] N_x \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 0, \eta \right) dt,$$

$$r_3(y) = \frac{2ac}{b^2} \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] N \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 0, 0 \right) dt -$$

$$- \frac{a}{b} N(1, y; 0, 0) + \frac{a^2}{b^2} \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] N_x \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 0, 0 \right) dt,$$

$$r_4(y) = -\frac{c^2}{b^2} \int_0^y d\eta \int_{\eta}^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] G_{\xi} \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; 0, \eta \right) dt.$$

Наконец, дифференцируя функцию $J_3(y)$ дважды, после некоторых выкладок имеем

$$J_3''(y) = -\frac{c^2}{b^2} \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) d\xi \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] G \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; \xi, 0 \right) dt +$$

$$+ \int_0^1 \bar{\tau}'(\xi) E_7(y, \xi) d\xi + r_1(y) \bar{\tau}(1) - r_2(y) \bar{\tau}(0),$$

где

$$\begin{aligned} E_7(y, \xi) = & \frac{a}{b} N(1, y; \xi, 0) + \frac{a^2}{b^2} E_6(y, \xi) - \\ & - \frac{2ac}{b^2} \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t - y) \right] N \left(\frac{b - ay + at}{b}, t; \xi, 0 \right) dt - \\ & - \frac{a^2}{b^2} \int_{\frac{1-\xi}{\sqrt{y}}}^{+\infty} \exp \left[-\frac{\lambda^2}{4} - \frac{c}{b} \sigma_2(y, \xi; \lambda) \right] d\lambda + \\ & + \frac{a^3}{b^3} [E_2(y, \xi) + E_3(y, \xi)] + \frac{a^2}{b^2} [E_4(y, \xi) - E_5(y, \xi)], \\ E_6(y, \xi) = & \begin{cases} \int_{\frac{1-\xi}{\sqrt{y}}}^{+\infty} \exp \left[-\frac{\lambda^2}{4} - \frac{c}{b} \sigma_2(y, \xi; \lambda) \right] d\lambda, & 0 \leq \xi \leq 1 - \frac{a}{b} y, \\ - \int_{-\infty}^{\frac{1-\xi}{\sqrt{y}}} \exp \left[-\frac{\lambda^2}{4} - \frac{c}{b} \sigma_2(y, \xi; \lambda) \right] d\lambda, & 1 - \frac{a}{b} y \leq \xi \leq 1, \end{cases} \\ \left. \begin{matrix} \sigma_2(y, \xi; \lambda) \\ \sigma_3(y, \xi; \lambda) \end{matrix} \right\} = & \frac{2b[y\lambda^2 - (1-\xi)^2]}{\lambda \sqrt{b^2\lambda^2 \mp 4ab(1-\xi) + 4a^2y + b\lambda^2 \mp 2a(1-\xi)}}, \\ \left. \begin{matrix} E_2(y, \xi) \\ E_3(y, \xi) \end{matrix} \right\} = & \int_0^y \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left\{ -\frac{[b(1-\xi) \mp a(y-t)]^2}{4b^2t} - \frac{c}{b} (y-t) \right\} dt, \\ \left. \begin{matrix} E_4(y, \xi) \\ E_5(y, \xi) \end{matrix} \right\} = & \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t - y) \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{b(1-\xi) \mp a(y-t) \mp 2bn}{2bt^{3/2}} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{[b(1-\xi) \mp a(y-t) \mp 2bn]^2}{4b^2t} \right\} dt. \end{aligned}$$

Итак, мы приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $f(y) = \varphi'(y)$:

$$f(y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y K_4(y, \eta) f(\eta) d\eta = g_4(y), \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} g_4(y) = & b\varphi_2'(y) - \frac{1}{b} \left[a^2 \tau'' \left(1 - \frac{a}{b} y \right) + 2ac\tau' \left(1 - \frac{a}{b} y \right) + \right. \\ & \left. + c^2 \tau \left(1 - \frac{a}{b} y \right) \right] \exp \left(-\frac{c}{b} y \right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^y R_4(y, \eta) \bar{\varphi}_1'(\eta) d\eta + \right. \\ & \left. + \bar{\varphi}_1(0) r_4(y) - \varphi(0) r_2(y) + \int_0^1 \bar{\tau}'(\xi) E_7(y, \xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \frac{c^2}{b^2} \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) d\xi \int_0^y \exp \left[\frac{c}{b} (t-y) \right] G \left(\frac{b-ay+at}{b}, t; \xi, 0 \right) dt \right\}. \end{aligned}$$

Здесь ядро $K_4(y, \eta)$ имеет слабую особенность, а правая часть $g_4(y)$ уравнения (3.6) — известная непрерывная функция. Поэтому уравнение (3.6) допускает единственное решение в классе непрерывных функций. Решая его, находим функцию $f(y) = \varphi'(y)$, следовательно, и функцию $\varphi(y)$. Подставляя ее значение в (3.1), определяем функцию $v(x, y)$ и тем самым функцию $u_1(x, y)$. Она дается по формулам (3.2)–(3.4).

Пусть теперь $h > b/a$. Тогда область D_1 разделим на $N+1$ частей так, чтобы высоты первых $N(N \geq 1)$ областей были равны на $h_0 = b/a$, а последней — не больше h_0 , и решаем задачу последовательно в каждой из этих областей.

Рассмотрим случай 6). Ограничимся рассмотрением задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.7), (1.9) с общими разрывными условиями склеивания (2.1) и (2.2).

Интегрируя уравнение (1.59) по x от 0 до x и переходя к пределу при $y \rightarrow +0$, с учетом условия $\tau_1'(0) = t_2$, где t_2 — известная константа, приходим к уравнению

$$\tau_1'(x) - \int_0^x v_1(t) dt = \frac{a}{c} \omega_1(0) \left[1 - \exp \left(-\frac{c}{a} x \right) \right] + t_2,$$

если $c \neq 0$,

$$\tau_1'(x) - \int_0^x v_1(t) dt = \omega_1(0) x + t_2, \text{ если } c = 0.$$

Здесь $\omega_1(0)$ — неизвестная константа, подлежащая определению.

Учитывая (2.1), (2.2) и (2.4), из последних двух уравнений имеем

$$\begin{aligned} \tau_2'(x) + p_{31}(x) \tau_2(x) - \int_0^x [p_{32}(t, x) \tau_2'(t) + \\ + q_{32}(t, x) \tau_2(t)] dt = B_3(x) \omega_1(0) + B_4(x), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $p_{31}(x)$, $p_{32}(t, x)$, $q_{32}(t, x)$ — те же коэффициенты, что и в уравнении (2.14);

$$\begin{aligned} B_3(x) &= \begin{cases} \frac{a}{c} \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{a} x\right) \right] / a_1(x), & \text{если } c \neq 0, \\ x/a_1(x), & \text{если } c = 0; \end{cases} \\ B_4(x) &= \frac{1}{a_1(x)} \int_0^x [\gamma_2(t) - \beta_1(t) a(t)] dt + [t_2 - \gamma_1'(x)] / a_1(x). \end{aligned}$$

Уравнение (3.7) решаем при первых двух условиях (2.9). Введя обозначения (2.15), уравнение (3.7) перепишем в виде

$$z(x) - \int_0^x K_5(t, x) z(t) dt = B_3(x) \omega_1(0) + B_5(x),$$

где

$$\begin{aligned} K_5(t, x) &= p_{32}(t, x) - p_{31}(x) + \int_t^x q_{32}(\lambda, x) d\lambda, \\ B_5(x) &= B_4(x) + \left[\int_0^x q_{32}(t, x) dt - p_{31}(x) \right] t_0. \end{aligned}$$

Решая его, находим

$$z(x) = B_3(x) \omega_1(0) + B_5(x) + \int_0^x \Gamma_5(t, x) [B_3(t) \omega_1(0) + B_5^*(t)] dt$$

или

$$\tau_2(x) = Q_5(x) + \omega_1(0) R_5(x), \quad (3.8)$$

где

$$Q_5(x) = \int_0^x \left[B_5(t) + \int_0^t \Gamma_5(\lambda, t) B_5(\lambda) d\lambda \right] dt + t_0,$$

$$R_5(x) = \int_0^x \left[B_3(t) + \int_0^t \Gamma_5(\lambda, t) B_3(\lambda) d\lambda \right] dt.$$

Полагая в (3.8) $x=1$ и учитывая $\tau_2(1)=t_1$, имеем $\omega_1(0)=[t_1 - Q_5(1)]/R_5(1)$, если $R_5(1) \neq 0$, а из (2.1) находим функцию $\tau_1(x)$.

Итак, для определения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к задаче

$$\begin{cases} \left(a \frac{\partial}{\partial x} + c \right) (u_{1xx} - u_{1y}) = 0, \\ u_1(0, y) = \varphi_1(y), u_1(1, y) = \varphi_2(y), \\ u_{1x}(0, y) = \varphi_3(y), u_1(x, 0) = \tau_1(x). \end{cases}$$

Отметим, что эта задача при $a=1, c=0$ была рассмотрена в работе [28] с помощью специально построенной функции Грина.

Введя обозначение $au_{1x} + cu_1 = v(x, y)$, для $v(x, y)$ получаем задачу

$$\begin{cases} v_{xx} - v_y = 0, \\ v(0, y) = a\varphi_3(y) + c\varphi_1(y) \equiv \bar{\varphi}_1(y), \\ v(1, y) = \varphi(y), \\ v(x, 0) = a\tau_1'(x) + c\tau_1(x) \equiv \bar{\tau}(x), \end{cases}$$

где $\varphi(y)$ — пока неизвестная функция. Решение этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_0^y \bar{\varphi}_1(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \right. \\ & \left. - \int_0^y \varphi(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Тогда функция $u_1(x, y)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp \left[\frac{c}{a} (t - x) \right] \left[\int_0^y \bar{\varphi}_1(\eta) G_\xi(t, y; 0, \eta) d\eta - \right. \\ & \left. - \int_0^y \varphi(\eta) G_\xi(t, y; 1, \eta) d\eta + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_0^1 \bar{\varphi}(\xi) G(t, y; \xi, 0) d\xi \Big] dt + \omega_1(y) \exp\left(-\frac{c}{a}x\right), \quad (3.9)$$

где $\omega_1(y)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

Полагая в (3.9) $x=0$, находим $\omega_1(y)=\varphi_1(y)$, полагая $x=1$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \exp\left[\frac{c}{a}(t-1)\right] dt \int_0^y \varphi(\eta) G_\xi(t, y; 1, \eta) d\eta = 2V\pi a \Big[\varphi_2(y) - \\ - \varphi_1(y) \exp\left(-\frac{c}{a}\right) \Big] - \int_0^1 \exp\left[\frac{c}{a}(t-1)\right] \Big[\int_0^y \bar{\varphi}_1(\eta) G_\xi(t, y; 0, \eta) d\eta + \\ + \int_0^1 \bar{\varphi}(\xi) G(t, y; \xi, 0) d\xi \Big] dt. \end{aligned}$$

Применив известную формулу обращения Абеля к этому уравнению, после некоторых вычислений получаем

$$\varphi(y) - \frac{1}{2\pi} \int_0^y K_6(y, \eta) \varphi(\eta) d\eta = g_6(y), \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} K_6(y, \eta) = \int_0^1 \frac{1}{2Vz^3(1-z)(y-\eta)^2} \exp\left[-\frac{1}{4z(y-\eta)} - \frac{c}{a}\right] dz + \\ + \frac{c}{2aV\sqrt{y-\eta}} \int_0^1 \frac{dz}{V1-z} - \int_1^0 \frac{\lambda^2 \exp\left[-\frac{\lambda^2}{4} - \frac{c}{a}Vz(y-\eta)\lambda\right] d\lambda + \\ + \frac{d}{dy} \int_\eta^y \frac{ds}{V\sqrt{y-s}} \int_0^1 \exp\left[\frac{c}{a}(t-1)\right] E_8(t, s, \eta) dt; \\ g_6(y) = \frac{a}{V\pi} \int_0^y \frac{\varphi_2'(s) - \varphi_1'(s) \exp\left(-\frac{c}{a}\right)}{V\sqrt{y-s}} ds - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{\varphi}_1(y) \exp\left(-\frac{c}{a}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^y \bar{\varphi}_1(\eta) K_7(y, \eta) d\eta + \\
& + \int_0^1 \frac{dz}{Vz(1-z)} \int_0^{\frac{1}{Vyz}} \lambda \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) \bar{\tau}(1 - Vyz\lambda) d\lambda + \\
& + \exp\left(-\frac{c}{a}\right) \int_0^1 \frac{dz}{Vz(1-z)} \int_0^{\frac{1}{Vyz}} \lambda \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) \bar{\tau}(Vyz\lambda) d\lambda - \\
& - \frac{c^2}{a^2} \int_0^y \frac{ds}{Vy-s} \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) d\xi \int_0^1 \exp\left[\frac{c}{a}(t-1)\right] G(t, s; \xi, 0) dt + E_{10}(y); \\
& K_7(y, \eta) = \int_0^1 \frac{1}{2Vz^3(1-z)(y-\eta)^2} \exp\left[-\frac{1}{4z(y-\eta)}\right] dz - \\
& - \frac{c}{2aVy-\eta} \int_0^1 \frac{dz}{V1-z} \int_0^{\frac{1}{Vz(y-\eta)}} \lambda^2 \exp\left[-\frac{\lambda^2}{4} + \frac{c}{a}Vz(y-\eta)\lambda - \frac{c}{a}\right] d\lambda - \\
& - \frac{d}{dy} \int_\eta^y \frac{ds}{Vy-s} \int_0^1 \exp\left[\frac{c}{a}(t-1)\right] E_9(t, s, \eta) dt; \\
& E_8(t, s, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{t-1-2n}{(s-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(t-1-2n)^2}{4(s-\eta)}\right]; \\
& E_9(t, s, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{t-2n}{(s-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(t-2n)^2}{4(s-\eta)}\right]; \\
& E_{10}(y) = \int_0^y \frac{ds}{Vy-s} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1-\xi-2n}{Vs^3} \exp\left[-\frac{(1-\xi-2n)^2}{4s}\right] - \right. \\
& \left. - \exp\left(-\frac{c}{a}\right) \frac{\xi-2n}{Vs^3} \exp\left[-\frac{(\xi-2n)^2}{4s}\right] \right\} \bar{\tau}(\xi) d\xi;
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}.$$

Отсюда видно, что ядро $K_6(y, \eta)$ имеет слабую особенность, а правая часть $g_6(y)$ непрерывна. Тогда уравнение (3.10) имеет единственное решение в классе непрерывных функций. Решая его, определяем функцию $\varphi(y)$ и тем самым функцию $u_1(x, y)$. Функция $u_2(x, y)$ в области D_2 находится формулой (2.17).

Наконец, рассмотрим случай 5). Как и в § 2, сначала определяем функции $\tau_i(x)$ и $\nu_i(x)$ ($i=1,2$). Тогда функция $u_2(x, y)$ в области D_2 дается по формуле (2.17), а для определения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 получаем задачу

$$\begin{cases} \left(b \frac{\partial}{\partial y} + c \right) (u_{1xx} - u_{1y}) = 0, \\ u_1(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_1(1, y) = \varphi_2(y), \\ u_1(x, 0) = \tau_1(x), \quad u_{1y}(x, 0) = \nu_1(x). \end{cases}$$

Отметим, что эта задача при $b=1, c=0$ была исследована в работе [28].

Полагая $bu_{1y} + cu_1 = v(x, y)$, для определения функции $v(x, y)$ приходим к задаче

$$\begin{cases} v_{xx} - v_y = 0, \\ v(0, y) = b\varphi_1'(y) + c\varphi_1(y) \equiv \bar{\varphi}_1(y), \\ v(1, y) = b\varphi_2'(y) + c\varphi_2(y) \equiv \bar{\varphi}_2(y), \\ v(x, 0) = b\nu_1(x) + c\tau_1(x) \equiv \bar{\tau}(x). \end{cases}$$

Тогда функция $u_1(x, y)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = & \frac{1}{2b\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp\left[-\frac{c}{b}(t-y)\right] \left[\int_0^t \bar{\varphi}_1(\eta) G_\xi(x, t; 0, \eta) d\eta - \right. \\ & \left. - \int_0^t \bar{\varphi}_2(\eta) G_\xi(x, t; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi \right] dt + \\ & + \tau_1(x) \exp\left(-\frac{c}{b}y\right), \end{aligned}$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности [см. (3.1)].

§ 4. Краевые задачи для уравнений третьего порядка, содержащих парабола-гиперболический оператор с младшими членами

Исследуем задачу D_{abc} для уравнения

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c\right) L^* u = 0, \quad (4.1)$$

где

$$L^* \equiv \begin{cases} L_1^* \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_1(x, y) & \text{в } D_1, \\ L_2^* \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_2(x, y) & \text{в } D_2; \end{cases}$$

a, b и c — заданные постоянные ($a^2 + b^2 \neq 0$); $a_i(x, y), b_i(x, y), c_i(x, y)$ — заданные функции в D_i ($i=1, 2$), причем $b_1(x, y) < 0$, $c_1(x, y) \leq 0$ в D_1 , кроме того, в D_1 функции $a_1, b_1, c_1, a_{1x}, a_{1y}, b_{1x}, b_{1y}$ удовлетворяют условию Гельдера, а в области $D_2 - a_2, b_2 \in C^1(\overline{D_2}), c_2 \in C^0(\overline{D_2})$, если $ab = 0$, $a_2, b_2 \in C^2(D_2), c_2 \in C^1(\overline{D_2})$, если $ab \neq 0$. Задача D_{abc} в этом случае формулируется следующим образом:

Задача D_{abc}^* . Требуется определить функцию $u(x, y)$, которая:

- I) непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$;
- II) является решением уравнения (4.1) в области D при $y \neq 0$;
- III) удовлетворяет на отрезке AB непрерывным условиям склеивания со своими первыми производными;
- IV) удовлетворяет следующим краевым условиям:
 - 1) при $0 < b/a \leq 1 - \{(1.2), (1.5), (1.6), (1.7), (1.9)\}$;
 - 2) при $1 < b/a < +\infty - \{(1.2), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.9)\}$;
 - 3) при $-\infty < b/a < -1 - \{(1.2), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.10)\}$;
 - 4) при $-1 \leq b/a < 0 - \{(1.2), (1.5), (1.6), (1.8), (1.10)\}$;
 - 5) при $a = 0, b \neq 0 - \{(1.2), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8)\}$;
 - 6) при $a \neq 0, b = 0$ выполняется одна из групп условий $\{(1.2), (1.5), (1.7), (1.9)\}, \{(1.2), (1.6), (1.8), (1.9)\}, \{(1.2), (1.5), (1.7), (1.10)\}, \{(1.2), (1.6), (1.8), (1.10)\}$.

Из условий I), III) задачи D_{abc}^* следует

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x), \quad (4.2)$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = \nu(x), \quad (4.3)$$

$$u_x(x, +0) = u_x(x, -0) = \tau'(x), \quad (4.4)$$

где $\tau(x)$ и $v(x)$ — пока неизвестные функции.

Полагая

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

уравнение (4.1) можно переписать в виде двух систем

$$\left. \begin{aligned} L_1^* u_1 &= v_1(x, y), \\ av_{1x} + bv_{1y} + cv_1 &= 0, \end{aligned} \right\} (x, y) \in D_1, \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} L_2^* u_2 &= v_2(x, y), \\ av_{2x} + bv_{2y} + cv_2 &= 0, \end{aligned} \right\} (x, y) \in D_2, \quad (4.6)$$

где $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$ — произвольные достаточно гладкие функции.

Здесь мы ограничимся исследованием случая 6), остальные случаи изучаются аналогично.

Рассмотрим случай группы условий $\{(1.2), (1.5), (1.7), (1.9)\}$ при $b_1(x, y) \equiv -1$. Учитывая (1.17), первое уравнение системы (4.6) перепишем в виде

$$L_2^* u_2 = \omega_2(y) \exp\left(-\frac{c}{a}x\right). \quad (4.7)$$

После перехода к характеристическим координатам уравнение (4.7) принимает вид

$$\begin{aligned} u_{2\xi\eta} + a_3(\xi, \eta) u_{2\xi} + b_3(\xi, \eta) u_{2\eta} + c_3(\xi, \eta) u_2 &= \\ = \frac{1}{4} \omega_2\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) \exp\left[-\frac{c(\xi + \eta)}{2a}\right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

а условия (1.5) и (1.7) переходят в

$$u_2|_{\xi=0} = \psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right), \quad (4.9)$$

и

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_3\left(\frac{\eta}{2}\right). \quad (4.10)$$

Известно, что решение уравнения (4.8), удовлетворяющее условиям (4.9) и

$$(u_{2\xi} - u_{2\eta})|_{\eta=-\xi} = v(\xi)$$

(задача Коши-Гурса), дается формулой (см. [73])

$$\begin{aligned}
u_2(\xi, \eta) = & F(\xi, \eta) + \int_0^\xi T_0(\xi, \eta; t) v(t) dt + \\
& + \frac{1}{4} \int_0^\xi dt \int_t^\xi S(t, \tau; \xi, \eta) \exp \left[-\frac{c(t+\tau)}{2a} \right] \omega_2 \left(\frac{t-\tau}{2} \right) d\tau + \\
& + \frac{1}{4} \int_0^\xi dt \int_t^\eta T(t, \tau; \xi, \eta) \exp \left[-\frac{c(t+\tau)}{2a} \right] \omega_2 \left(\frac{t-\tau}{2} \right) d\tau, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F(\xi, \eta) = & \psi_1 \left(\frac{\eta}{2} \right) + \psi_1 \left(\frac{\xi}{2} \right) - \psi_1(0) + \\
& + \int_0^\xi dt \int_t^\xi \Phi(t, \tau) S(t, \tau; \xi, \eta) d\tau + \\
& + \int_0^\xi dt \int_t^\eta \Phi(t, \tau) T(t, \tau; \xi, \eta) d\tau; \\
\Phi(\xi, \eta) = & -\frac{1}{2} a_3(\xi, \eta) \psi_1'(\xi/2) - \frac{1}{2} b_3(\xi, \eta) \psi_1' \left(\frac{\eta}{2} \right) - \\
& - c_3(\xi, \eta) \left[\psi_1 \left(\frac{\eta}{2} \right) + \psi_1 \left(\frac{\xi}{2} \right) - \psi_1(0) \right]; \\
T_0(\xi, \eta; t) = & 1 - \int_t^\xi a_3(t, \tau) S(t, \tau; \xi, \eta) d\tau - \\
& - \int_t^\eta a_3(t, \tau) T(t, \tau; \xi, \eta) d\tau - \int_t^\xi d\lambda \int_\lambda^\xi c_3(\lambda, \tau) S(\lambda, \tau; \xi, \eta) d\tau - \\
& - \int_t^\xi d\lambda \int_\lambda^\eta c_3(\lambda, \tau) T(\lambda, \tau; \xi, \eta) d\tau,
\end{aligned}$$

а $S(t, \tau; \xi, \eta)$ и $T(t, \tau; \xi, \eta)$ выражаются через коэффициенты a_3, b_3, c_3 и непрерывны в $\bar{D}_2^0 \times \bar{D}_2^0$, функции S_ξ, S_η, T_η непрерывны в $\bar{D}_2^0 \times \bar{D}_2^0$, а функция T_ξ может иметь разрыв первого рода внутри этой области (см. [73]).

Подставляя (4.11) в (4.10), получаем

$$\int_0^{\eta} T(0, \tau; 0, \eta) \exp\left(-\frac{c\tau}{2a}\right) \omega_2\left(-\frac{\tau}{2}\right) d\tau = 2V\bar{2}\psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right) - \\ - 2\psi_1'(0) - 4 \int_0^{\eta} \Phi(0, \tau) T(0, \tau; 0, \eta) d\tau - \\ - 4 \left[1 - \int_0^{\eta} a_3(0, \tau) T(0, \tau; 0, \eta) d\tau \right] \varphi_1'(0). \quad (4.12)$$

Здесь положено $v(0) = u_{2y}(0, 0) = u_{1y}(0, 0) = \varphi_1'(0)$ и выполняется равенство $\varphi_1'(0) = \frac{1}{2} [V\bar{2}\psi_3(0) - \psi_1'(0)]$. Дифференцируя уравнение (4.12) по η , приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\omega_2\left(-\frac{\eta}{2}\right) + \int_0^{\eta} K_8(\tau, \eta) \omega_2\left(-\frac{\tau}{2}\right) d\tau = g_8(\eta), \quad (4.13)$$

где

$$K_8(\tau, \eta) = T_{\eta}(0, \tau; 0, \eta) \exp\left[\frac{c(\eta - \tau)}{2a}\right],$$

$$g_8(\eta) = \left\{ V\bar{2}\psi_3'\left(\frac{\eta}{2}\right) - 4\Phi(0, \eta) - 4 \int_0^{\eta} \Phi(0, \tau) T_{\eta}(0, \tau; 0, \eta) d\tau + \right. \\ \left. + 4\varphi_1'(0) \left[a_3(0, \eta) + \int_0^{\eta} a_3(0, \tau) T_{\eta}(0, \tau; 0, \eta) d\tau \right] \right\} \exp\left(\frac{c\eta}{2a}\right).$$

Отсюда видно, что ядро и правая часть уравнения (4.13) непрерывны. Тогда оно допускает единственное решение в классе непрерывных функций. Решая его, находим $\omega_2\left(-\frac{\eta}{2}\right)$ при $-\frac{1}{2} \leq \leq -\frac{\eta}{2} \leq 0$. Так как в характеристическом треугольнике выполняется неравенство $0 < \xi \leq \eta$, то $-\frac{1}{2} \leq \frac{\xi - \eta}{2} < 0$. Поэтому вместо $\omega_2\left(-\frac{\eta}{2}\right)$ мы можем брать $\omega_2\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)$. Подставляя значение функции $\omega_2\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)$ в (4.11), получаем решение $u_2(\xi, \eta)$ в виде

$$u_2(\xi, \eta) = M(\xi, \eta) + \int_0^{\xi} T_0(\xi, \eta; t) v(t) dt, \quad (4.14)$$

где

$$M(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) + \frac{1}{4} \int_0^\xi dt \int_t^\xi S(t, \tau; \xi, \eta) \exp \left[-\frac{c(t+\tau)}{2a} \right] \times \\ \times \omega_2 \left(\frac{t-\tau}{2} \right) d\tau + \frac{1}{4} \int_0^\xi dt \int_t^\eta T(t, \tau; \xi, \eta) \times \\ \times \exp \left[-\frac{c(t+\tau)}{2a} \right] \omega_2 \left(\frac{t-\tau}{2} \right) d\tau$$

— уже известная функция.

При $\eta = \xi = x$, полагая $M(x) = M(x, x)$, $T_0(x, t) = T_0(x, x; t)$, $\tau(x) = u_2(x, x)$, из (4.14) находим

$$\tau(x) = M(x) + \int_0^x T_0(x, t) v(t) dt. \quad (4.15)$$

Дифференцируя уравнение (4.15), получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $v(x)$:

$$v(x) + \int_0^x T_{0x}(x, t) v(t) dt = \tau'(x) - M'(x). \quad (4.16)$$

Правая часть уравнения (4.16) непрерывна, а ядро может иметь разрыв первого рода. Поэтому $v(x) \in C[0, 1]$:

$$v(x) = \tau'(x) - M'(x) + \int_0^x \Gamma_0(x, t) [M'(t) - \tau'(t)] dt, \quad (4.17)$$

где $\Gamma_0(x, t)$ — резольвента ядра $T_{0x}(x, t)$. Это первое соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из области D_2 . Теперь нам надо получить второе соотношение между этими функциями. С этой целью уравнение (4.1) при $y > 0$ перепишем в виде

$$L_1^* u_1 = \omega_1(y) \exp \left(-\frac{c}{a} x \right),$$

где $\omega_1(y)$ — произвольная непрерывная функция. В силу свойств задачи, переходя в этом уравнении к пределу при $y \rightarrow +0$, получаем второе соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из области D_1 :

$$\tau''(x) + a_1(x, 0) \tau'(x) + c_1(x, 0) \tau(x) - \\ - v(x) = \omega_1(0) \exp \left(-\frac{c}{a} x \right). \quad (4.18)$$

Подставляя (4.17) в (4.18), получаем

$$\tau''(x) + p(x)\tau'(x) + q(x)\tau(x) + \int_0^x \Gamma_0(x, t)\tau'(t)dt = \omega_1(0)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right) + m(x), \quad (4.19)$$

где

$$p(x) = a_1(x, 0) - 1, \quad q(x) = c_1(x, 0), \\ m(x) = \int_0^x \Gamma_0(x, t)M'(t)dt - M'(x).$$

Уравнение (4.19) решаем при начальных условиях

$$\tau(0) = \psi_1(0) = \varphi_1(0), \quad \tau'(0) = \sqrt{2}\bar{\psi}_3(0) - \varphi_1'(0). \quad (4.20)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$\tau''(x) = z(x).$$

Тогда с учетом условий (4.20) имеем

$$\tau'(x) = \int_0^x z(t)dt + \sqrt{2}\bar{\psi}_3(0) - \varphi_1'(0), \\ \tau(x) = \int_0^x (x-t)z(t)dt + [\sqrt{2}\bar{\psi}_3(0) - \varphi_1'(0)]x + \psi_1(0).$$

Учитывая эти обозначения, уравнение (4.19) перепишем в виде

$$z(x) + \int_0^x K_9(x, t)z(t)dt = g_9(x) + \omega_1(0)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right), \quad (4.21)$$

где

$$K_9(x, t) = p(x) + q(x)(x-t) + \int_t^x \Gamma_0(x, \lambda)d\lambda, \\ g_9(x) = m(x) - \psi_1(0)q(x) - [\sqrt{2}\bar{\psi}_3(0) - \varphi_1'(0)] \times \\ \times \left[p(x) + xq(x) + \int_0^x \Gamma_0(x, t)dt \right].$$

Ядро и правая часть уравнения (4.21) непрерывны, поэтому $z(x) \in C[0, 1]$. Решая его, находим $z(x)$:

$$z(x) = g_9(x) - \int_0^x \Gamma_9(x, t)g_9(t)dt +$$

$$+ \omega_1(0) \left\{ \exp\left(-\frac{c}{a}x\right) - \int_0^x \Gamma_9(x, t) \exp\left(-\frac{c}{a}t\right) dt \right\},$$

где $\Gamma_9(x, t)$ — резольвента ядра $K_9(x, t)$. Учитывая последнее равенство, получаем

$$\tau(x) = Q_6(x) + \omega_1(0) R_6(x), \quad (4.22)$$

где

$$R_6(x) = \int_0^x (x-t) \left[\exp\left(-\frac{c}{a}t\right) - \int_0^t \Gamma_9(t, \lambda) \exp\left(-\frac{c}{a}\lambda\right) d\lambda \right] dt,$$

$$Q_6(x) = \int_0^x (x-t) \left[g_9(t) - \int_0^t \Gamma_9(t, \lambda) g_9(\lambda) d\lambda \right] dt + \\ + \left[\sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0) \right] x + \psi_1(0).$$

Неизвестную константу $\omega_1(0)$ находим из условия $\tau(1) = \varphi_2(0)$. Полагая в (4.22) $x=1$, имеем

$$\omega_1(0) = [\varphi_2(0) - Q_6(1)]/R_6(1), \text{ если } R_6(1) \neq 0.$$

Итак, функция $\tau(x)$ определена и тем самым $v(x)$. Подставляя значение функции $v(x)$ в (4.14), находим и функцию $u_2(\xi, \eta)$ в области D_2^0 . Для определения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к задаче (1.2), (1.9),

$$u_1(x, 0) = \tau(x) \quad (4.23)$$

для уравнения

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + c \right) (u_{1xx} - u_{1y}) = M_2 u_1(x, y), \quad (4.24)$$

где

$$M_2 u_1(x, y) = m_1(x, y) u_{1xx} + m_2(x, y) u_{1x} + m_3(x, y) u_1, \\ m_1(x, y) = -aa_1(x, y), \quad m_2(x, y) = -aa_{1x}(x, y) - ac_1(x, y) - \\ - ca_1(x, y), \quad m_3(x, y) = -ac_{1x}(x, y) - cc_1(x, y).$$

Решение уравнения (4.24), удовлетворяющее условиям (1.2), (1.9), (4.23) будем искать в виде

$$u_1(x, y) = u_{11}(x, y) + u_{12}(x, y),$$

где $u_{11}(x, y)$ является решением задачи (1.2), (1.9), (4.23) для уравнения

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + c\right) (u_{11xx} - u_{11y}) = 0,$$

которая изучена в § 3, а $u_{12}(x, y)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \left(a \frac{\partial}{\partial x} + c\right) (u_{12xx} - u_{12y}) = M_2 u_{12}(x, y) + M_2^*(x, y), \\ u_{12}(0, y) = u_{12}(1, y) = u_{12x}(0, y) = u_{12}(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

здесь $M_2^*(x, y) = M_2 u_{11}(x, y)$ — уже известная функция.

Положим

$$\begin{cases} \left(a \frac{\partial}{\partial x} + c\right) (u_{12xx} - u_{12y}) = W(x, y), \\ au_{12x} + cu_{12} = V(x, y). \end{cases} \quad (4.26)$$

Тогда для $V(x, y)$ получаем задачу

$$\begin{cases} V_{xx} - V_y = W(x, y), \\ V(0, y) = V(x, 0) = 0, \quad V(1, y) = a\varphi(y), \end{cases}$$

где $\varphi(y)$ — пока неизвестная функция.

Записывая решение этой задачи и подставляя его в (4.26), затем находя решение уравнения (4.26), удовлетворяющее условию $u_{12}(x, 0) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} u_{12}(x, y) = & -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left[\frac{c}{a}(t-x)\right] \left[a \int_0^y \varphi(\eta) \times \right. \\ & \left. \times G_\xi(t, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^y \int_0^1 G(t, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] dt. \end{aligned}$$

Здесь переходя к пределу при $x \rightarrow 1$ — 0 приходим к уравнению Вольтерра первого рода относительно $\varphi(y)$:

$$\begin{aligned} & -\int_0^y \varphi(\eta) d\eta \int_0^1 \exp\left[\frac{c}{a}(t-1)\right] G_\xi(t, y; 1, \eta) dt = \\ & = \frac{1}{a} \int_0^y d\eta \int_0^1 W(\xi, \eta) d\xi \int_0^1 \exp\left[\frac{c}{a}(t-1)\right] G(t, y; \xi, \eta) dt. \end{aligned}$$

Как и в § 3, применяя обращение Абеля к этому уравнению, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) - \frac{1}{2\pi} \int_0^y K_{10}(y, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \int_0^y d\eta \int_0^1 G_1(y, \eta; \xi) \mathcal{W}(\xi, \eta) d\xi,$$

где $K_{10}(y, \eta)$ — то же ядро, что и в уравнении (3.10), а

$$\begin{aligned} G_1(y, \eta; \xi) = & \frac{1}{a\sqrt{y-\eta}} \exp\left[\frac{c}{a}(\xi-1)\right] - \\ & - \frac{2}{a} \int_{\frac{1-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}^{+\infty} \frac{\lambda \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) d\lambda}{\sqrt{\lambda^2(y-\eta) - (1-\xi)^2}} - \\ & - \frac{2}{a} \exp\left(-\frac{c}{a}\right) \int_{\frac{\xi}{\sqrt{y-\eta}}}^{+\infty} \frac{\lambda \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) d\lambda}{\sqrt{\lambda^2(y-\eta) - \xi^2}} - \\ & - \frac{1}{a} \int_{\eta}^y \frac{1}{\sqrt{y-s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-\xi-2n}{(s-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(1-\xi-2n)^2}{4(s-\eta)}\right] ds - \\ & - \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{c}{a}\right) \int_{\eta}^y \frac{1}{\sqrt{y-s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\xi+2n}{(s-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\xi+2n)^2}{4(s-\eta)}\right] ds + \\ & + \frac{c^2}{a^3} \int_{\eta}^y \frac{ds}{\sqrt{y-s}} \cdot \int_0^1 \exp\left[\frac{c}{a}(t-1)\right] G(t, s; \xi, \eta) dt, \\ & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}. \end{aligned}$$

Решая это уравнение, приходим к равенству

$$\varphi(y) = \int_0^y d\eta \int_0^1 G_2(y, \eta; \xi) \mathcal{W}(\xi, \eta) d\xi,$$

где

$$G_2(y, \eta; \xi) = G_1(y, \eta; \xi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^y \Gamma_{10}(y, \tau) G_1(\tau, \eta; \xi) d\tau,$$

а $\Gamma_{10}(y, \eta)$ — резольвента ядра $K_{10}(y, \eta)$. Тогда имеем

$$u_{12}(x, y) = - \int_0^y d\eta \int_0^1 W(\xi, \eta) d\xi \int_0^x \exp\left[\frac{c}{a}(t-x)\right] \times \\ \times \left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} G(t, y; \xi, \eta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y G_2(\tau, \eta; \xi) G_{\xi}(t, y; 1, \tau) d\tau \right] dt.$$

Подставляя его в уравнение (4.25), получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $W(x, y)$:

$$W(x, y) = \int_0^y d\eta \int_0^1 G_3(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) d\xi + M_2^*(x, y), \quad (4.27)$$

где

$$G_3(x, y; \xi, \eta) = - \frac{m_1(x, y)}{2a\sqrt{\pi}} \left[G_x(x, y; \xi, \eta) + \right. \\ \left. + a \int_{\eta}^y G_2(\tau, \eta; \xi) G_{\xi x}(x, y; 1, \tau) d\tau \right] - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left[m_2(x, y) - \frac{c}{a} m_1(x, y) \right] \left[G(x, y; \xi, \eta) + \right. \\ \left. + a \int_{\eta}^y G_2(\tau, \eta; \xi) G_{\xi}(x, y; 1, \tau) d\tau \right] - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left[m_3(x, y) - \frac{c}{a} m_2(x, y) + \frac{c^2}{a^2} m_1(x, y) \right] \times \\ \times \int_0^x \exp\left[\frac{c}{a}(t-x)\right] \left[G(t, y; \xi, \eta) + \right. \\ \left. + a \int_{\eta}^y G_2(\tau, \eta; \xi) G_{\xi}(t, y; 1, \tau) d\tau \right] dt.$$

Отсюда видно, что функция $M_2^*(x, y)$ непрерывна, а ядро $G_3(x, y; \xi, \eta)$ имеет слабую особенность. Поэтому уравнение (4.27) имеет единственное решение в классе непрерывных функций. Решая его, находим функцию $W(x, y)$ и тем самым функцию $u_1(x, y)$.

З а м е ч а н и е 4.1. Задачу L_{abc}^* можно решить и с разрывными условиями склеивания на линии изменения типа. Это не приводит к существенным затруднениям.

Глава 5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$S_1 S_2 Lu \equiv \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) Lu = 0 \quad (1.1)$$

в односвязной области D , описанной в главе 4, где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y & \text{в } D_1, \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} & \text{в } D_2, \end{cases}$$

a_i, b_i ($i = 1, 2$) — заданные вещественные числа ($a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$).

Очевидно, что уравнение

$$\left(a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Lu = 0 \quad (1.1')$$

при $b^2 - ac \geq 0$ может быть сведено к виду (1.1). В самом деле, его можно переписать в виде

$$\left[a \frac{\partial}{\partial x} + (b + \sqrt{b^2 - ac}) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[a \frac{\partial}{\partial x} + (b - \sqrt{b^2 - ac}) \frac{\partial}{\partial y} \right] Lu = 0.$$

Если в этом уравнении полагать $b + \sqrt{b^2 - ac} = b_1$, $b - \sqrt{b^2 - ac} = b_2$, то получаем уравнение вида (1.1). И наоборот, уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$\left[a_1 a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_1 b_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] Lu = 0,$$

где, полагая $a_1 a_2 = a$, $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2b$, $b_1 b_2 = c$, получаем уравнение (1.1'). Заметим, что для исследований форма уравнения (1.1) является более удобной.

Относительно расположения характеристик операторов S_1 и S_2 , проходящих через точки C , возможны следующие случаи: если угловые коэффициенты $\gamma_i = b_i/a_i$ характеристик операторов S_i ($i = 1, 2$) меняются в промежутках $-\infty < \gamma_i < -1$ и $1 < \gamma_i < +\infty$, то такие характеристики проходят внутри области D_2 , а если $-1 \leq \gamma_i < 0$ и $0 < \gamma_i \leq 1$, то вне области D_2 . Если же $\gamma_i = 0$ или $\gamma_i = \infty$, то эти характеристики будут параллельными оси x или y . Тогда относительно расположения этих характеристик может быть 36 случаев. Однако основными являются 13, для которых изучаются самостоятельные краевые задачи. К ним сводятся остальные случаи с помощью замены индексов или независимого переменного $x = 1 - \xi$.

Сначала выпишем и пронумеруем краевые условия, которые используются при постановке краевых задач для уравнения (1.1):

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.2)$$

$$u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.3)$$

$$u_x(1, y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.4)$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_5(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.5)$$

$$u_{xx}(1, y) = \varphi_6(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.6)$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (1.7)$$

$$u|_{BC} = \psi_2(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (1.8)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AC} = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (1.9)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BC} = \psi_4(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (1.10)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|_{AC} = \psi_5(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (1.11)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|_{BC} = \psi_6(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \quad (1.12)$$

Здесь n — внутренняя нормаль; $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$ ($i = \overline{1, 6}$) — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие естественным условиям согласования, обеспечивающим достаточную гладкость решения поставленной ниже задачи.

Задача $D_{a_1 b_1}^{a_2 b_2}$. Требуется определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- I) она непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$;
- II) является регулярным решением уравнения (1.1) в области D при $y \neq 0$;
- III) удовлетворяет краевым условиям, приведенным ниже:

Номера случаев	Значения угловых коэффициентов γ_1 и γ_2	Краевые условия
1)	$\gamma_1 \in (0, 1), \gamma_2 \in (0, 1)$	(1.2), (1.3), (1.5), (1.7), (1.9), (1.11)
2)	$\gamma_1 \in (0, 1), \gamma_2 \in (1, +\infty)$	(1.2), (1.3), (1.5), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11)
3)	$\gamma_1 \in (0, 1), \gamma_2 \in (-\infty, -1)$	(1.2), (1.3), (1.4), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11)
4)	$\gamma_1 \in (0, 1), \gamma_2 \in (-1, 0)$	(1.2), (1.3), (1.4), (1.7), (1.9), (1.10)
5)	$\gamma_1 \in (1, +\infty), \gamma_2 \in (1, +\infty)$	(1.2), (1.3), (1.5), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12)
6)	$\gamma_1 \in (1, +\infty), \gamma_2 \in (-\infty, -1)$	(1.2), (1.3), (1.4), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12)
7)	$\gamma_1 = \infty, \gamma_2 \in (0, 1)$	(1.2), (1.3), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11)
8)	$\gamma_1 = \infty, \gamma_2 \in (1, +\infty)$	(1.2), (1.3), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12)
9)	$\gamma_1 = \infty, \gamma_2 = \infty$	(1.2), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12)
10)	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 \in (0, 1)$	(1.2), (1.3), (1.4), (1.7), (1.9), (1.10)
11)	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 \in (1, +\infty)$	(1.2), (1.3), (1.4), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11)
12)	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = \infty$	(1.2), (1.3), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11)
13)	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$	(1.2), (1.3), (1.4), (1.7), (1.9), (1.10)

IV) в случае 13) функция $u(x, y)$ и ее первые производные в случаях 10)—12), кроме того, и вторые производные, а во всех остальных случаях, кроме первых и вторых производных, и третьи производные удовлетворяют на отрезке AB непрерывным условиям склеивания.

Замечание 1.1. В задаче $D_{a_1 b_1}^{a_2 b_2}$ во всех 13 случаях краевое условие (1.7) может быть заменено на условие (1.8).

З а м е ч а н и е 1.2. Условие (1.7) нельзя заменить условием (1.8), т. е. характеристики AC и BC не равноправны для следующих предельных значений коэффициентов a_i, b_i ($i=1, 2$): в случае 1) $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = 0$; в случаях 2) и 3) $a_1 = b_1$; в случае 4) $a_1 = b_1, a_2 \neq -b_2$; в случаях 7) и 11) $a^2 = b^2$. Если в случае 4) $a_1 \neq b_1, a_2 = -b_2$, то условие (1.8) нельзя заменить условием (1.7), если же $a_1 = b_1, a_2 = -b_2$, то нельзя задавать ни условие (1.7), ни условие (1.8), т. е. в этом случае задача не разрешима.

Отметим, что случай 13) с условиями (1.2), (1.3), (1.4), (1.7), (1.9), (1.11) был рассмотрен в работе [85].

Как видно из постановки задачи $D_{a_i b_i}^{a_i b_i}$, она объединяет в себе 13 различных задач. Ниже приведем ее решение, указав отличительные моменты одного случая от другого.

Полагая

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) & \text{в } D_1, \\ u_2(x, y) & \text{в } D_2 \end{cases} \quad (1.13)$$

в силу условия IV) задачи $D_{a_i b_i}^{a_i b_i}$, примем обозначения

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \tau(x), \quad (1.14)$$

$$u_{1y}(x, 0) = u_{2y}(x, 0) = \nu(x), \quad (1.15)$$

$$u_{1yy}(x, 0) = u_{2yy}(x, 0) = \mu(x), \quad (1.16)$$

$$u_{1yyy}(x, 0) = u_{2yyy}(x, 0) = \theta(x), \quad (1.17)$$

где $\tau(x), \nu(x), \mu(x), \theta(x)$ — пока неизвестные достаточно гладкие функции.

Учитывая (1.13), уравнение (1.1) в областях D_2 и D_1 перепишем в виде систем

$$L_2 u_2 = v_2(x, y), \quad (1.18)$$

$$S_2 v_2 = W_2(x, y), \quad (1.19)$$

$$S_1 W_2 = 0 \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{ в } D_2. \quad (1.20)$$

$$S_1 u_1 = v_1(x, y), \quad (1.21)$$

$$S_2 v_1 = W_1(x, y), \quad (1.22)$$

$$L_1 W_1 = 0 \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{ в } D_1, \quad (1.23)$$

где v_i, W_i ($i = 1, 2$) — новые неизвестные функции.

**§ 2. Исследование случаев,
когда характеристики операторов S_1 и S_2 не параллельны
осям координат**

1. Случай 1). Без ограничения общности можно полагать $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_2 > 0$, $b_2/a_2 \geq b_1/a_1$.

а) Пусть $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Тогда общее решение уравнения (1.18) имеет вид

$$u_2(x, y) = F(x+y) + \Phi(x-y) + \frac{1}{4} \int_0^{x+y} d\xi \int_1^{x-y} \left[\omega_{21} \left(\frac{b_1 - a_1}{2} \xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b_1 + a_1}{2} \eta \right) + \omega_{22} \left(\frac{b_2 - a_2}{2} \xi + \frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) \right] d\eta, \quad (2.1)$$

где F и Φ — четырежды непрерывно дифференцируемые функции.

Подставляя (2.1) в (1.7), (1.9) и (1.11), соответственно получаем

$$\Phi(x) = \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) - F(0), \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{2} \int_1^{2x} \left[\omega_{21} \left(\frac{b_1 + a_1}{2} \eta \right) + \omega_{22} \left(\frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) \right] d\eta = \sqrt{2} \psi_3(x) - 2F'(0),$$

$$\frac{b_1 - a_1}{2} \int_1^{2x} \omega'_{21} \left(\frac{b_1 + a_1}{2} \eta \right) d\eta + \frac{b_2 - a_2}{2} \int_1^{2x} \omega'_{22} \left(\frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) d\eta = \\ = 2\psi_5(x) - 4F''(0).$$

Из последних двух уравнений следует

$$F'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_3\left(\frac{1}{2}\right), \quad F''(0) = \frac{1}{2} \psi_5\left(\frac{1}{2}\right), \quad (2.3)$$

$$\omega_{21}[(b_1 + a_1)x] + \omega_{22}[(b_2 + a_2)x] = \sqrt{2} \psi'_3(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{b_1 - a_1}{b_1 + a_1} \omega_{21}[(b_1 + a_1)x] - \frac{b_1 - a_1}{b_1 + a_1} \omega_{21}\left(\frac{b_1 + a_1}{2}\right) + \\ + \frac{b_2 - a_2}{b_2 + a_2} \omega_{22}[(b_2 + a_2)x] - \frac{b_2 - a_2}{b_2 + a_2} \omega_{22}\left(\frac{b_2 + a_2}{2}\right) = \\ = 2 \left[\psi_5(x) - \psi_5\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

Из (2.4) при $x = \frac{1}{2}$ имеем

$$\omega_{22} \left(\frac{b_2 + a_2}{2} \right) = \sqrt{2} \psi'_3 \left(\frac{1}{2} \right) - \omega_{21} \left(\frac{b_1 + a_1}{2} \right).$$

Учитывая последнее равенство, решаем систему уравнений (2.4), (2.5) относительно неизвестных функций $\omega_{21}[(b_1 + a_1)x]$, $\omega_{22}[(b_2 + a_2)x]$:

$$\begin{aligned} \omega_{21}[(b_1 + a_1)x] = \omega_{21} \left(\frac{b_1 + a_1}{2} \right) - \frac{(b_1 + a_1)(b_2 + a_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \left\{ \psi_5(x) - \right. \\ \left. - \psi_5 \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{b_2 - a_2}{\sqrt{2}(b_2 + a_2)} \left[\psi'_3(x) - \psi'_3 \left(\frac{1}{2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \omega_{22}[(b_2 + a_2)x] = \sqrt{2} \psi'_3(x) + \frac{(b_1 + a_1)(b_2 + a_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \left\{ \psi_5(x) - \right. \\ \left. - \psi_5 \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{b_2 - a_2}{\sqrt{2}(b_2 + a_2)} \left[\psi'_3(x) - \psi'_3 \left(\frac{1}{2} \right) \right] \right\} - \omega_{21} \left(\frac{b_1 + a_1}{2} \right). \end{aligned}$$

В (2.6) аргумент $(b_1 + a_1)x$ заменив на $b_1 x - a_1 y$, а в последней формуле $(b_2 + a_2)x$ на $b_2 x - a_2 y$ и сложив полученные формулы, находим

$$\omega_{21}(b_1 x - a_1 y) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y) = \alpha(x, y), \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) = \sqrt{2} \psi'_3 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \frac{(b_1 + a_1)(b_2 + a_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \left\{ \psi_5 \left(\frac{b_1 x - a_1 y}{b_1 + a_1} \right) - \right. \\ \left. - \psi_5 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \frac{b_2 - a_2}{\sqrt{2}(b_2 + a_2)} \left[\psi'_3 \left(\frac{b_1 x - a_1 y}{b_1 + a_1} \right) - \psi'_3 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя (2.2) и (2.7) в (2.1), имеем

$$u_2(x, y) = F(x + y) - F(0) + P(x, y), \quad (2.8)$$

где

$$P(x, y) = \psi_1 \left(\frac{x - y}{2} \right) + \frac{1}{4} \int_0^{x+y} d\xi \int_1^{x-y} \alpha \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2} \right) d\eta.$$

Теперь мы должны получить соотношения между неизвестными функциями $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$ и $\theta(x)$. Учитывая (1.14)–(1.17), из (2.8) находим

$$\nu(x) = \tau'(x) - P_x(x, 0) + P_y(x, 0), \quad (2.9)$$

$$\nu'(x) = \tau''(x) - P_{xx}(x, 0) + P_{xy}(x, 0), \quad (2.10)$$

$$v''(x) = \tau'''(x) - P_{xxx}(x, 0) + P_{xxy}(x, 0), \quad (2.11)$$

а из уравнения (1.18) —

$$\mu(x) = \tau''(x) - \alpha(x, 0), \quad (2.12)$$

$$\mu'(x) = \tau'''(x) - \alpha_x(x, 0), \quad (2.13)$$

$$\theta(x) = \tau'''(x) - \alpha_y(x, 0) - P_{xxx}(x, 0) + P_{xxy}(x, 0). \quad (2.14)$$

Уравнение (1.1) в области D_1 перепишем в виде

$$a_1 a_2 u_{1xxx} - a_1 a_2 u_{1yxx} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) u_{1yx} - \\ - (a_1 b_2 + a_2 b_1) u_{1yyx} + b_1 b_2 u_{1yyx} - b_1 b_2 u_{1yyy} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по x от 0 до x и переходя к пределу при $y \rightarrow +0$ с учетом (2.10)–(2.14), получаем уравнение относительно $\tau(x)$:

$$\tau'''(x) - \tau''(x) = \gamma_1(x) + 2k_{11}, \quad (2.15)$$

где

$$\gamma_1(x) = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{(b_1 + a_1)(b_2 + a_2)} [P_{xxx}(x, 0) - P_{xxy}(x, 0) - \alpha(x, 0)] + \\ + \frac{b_1 b_2}{(b_1 + a_1)(b_2 + a_2)} \left[\alpha_x(x, 0) - \int_0^x \alpha_y(t, 0) dt + P_{xx}(0, 0) - \right. \\ \left. - P_{xy}(0, 0) \right] - \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(b_1 + a_1)(b_2 + a_2)} [P_{xx}(x, 0) - P_{xy}(x, 0)],$$

а $2k_{11} = [(b_1 + a_1)(b_2 + a_2)]^{-1} [h(0) - b_1 b_2 \tau''(0)]$ — неизвестная константа, подлежащая определению.

Интегрируя уравнение (2.15) дважды, приходим к уравнению

$$\tau'(x) - \tau(x) = k_{11}x^2 + k_{12}x + k_{13} + \int_0^x (x-t) \gamma_1(t) dt, \quad (2.16)$$

где k_{12}, k_{13} — произвольные постоянные.

Уравнение (2.16) решаем при условии $\tau(0) = \varphi_1(0) = \psi_1(0)$:

$$\tau(x) = \int_0^x [\exp(x-t) - 1 - (x-t)] \gamma_1(t) dt + \varphi_1(0) \exp x + \\ + k_{13}(\exp x - 1) + k_{12}(\exp x - 1 - x) + \\ + k_{11}(2 \exp x - 2 - 2x - x^2). \quad (2.17)$$

Постоянные k_{11} , k_{12} , k_{13} определяются из условий

$$\tau'(0) = \sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0) = \varphi_3(0), \quad \tau''(0) = \varphi_5(0), \quad \tau(1) = \varphi_2(0).$$

Дифференцируя (2.17), имеем

$$\begin{aligned} \tau'(x) = & \int_0^x [\exp(x-t) - 1] \gamma_1(t) dt + [\varphi_1(0) + \\ & + k_{13}] \exp x + k_{12} (\exp x - 1) + 2k_{11} (\exp x - 1 - x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отсюда при $x=0$ в силу $\tau'(0) = \sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0)$ находим

$$k_{13} = \sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0) - \varphi_1(0).$$

Дифференцируя (2.18) и учитывая последнее равенство, получаем

$$\begin{aligned} \tau''(x) = & \int_0^x \exp(x-t) \gamma_1(t) dt + [\sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0) + \\ & + k_{12}] \exp x + 2k_{11} (\exp x - 1). \end{aligned} \quad (2.19)$$

При $x=0$ в силу $\tau''(0) = \varphi_5(0)$ из (2.19) следует $k_{12} = \varphi_5(0) - \sqrt{2} \psi_3(0) + \varphi_1'(0)$. Полагая в (2.17) $x=1$, в силу $\tau(1) = \varphi_2(0)$ находим

$$\begin{aligned} k_{11} = & \frac{1}{2e-5} \left\{ \varphi_2(0) - \int_0^1 [\exp(1-t) - 2 + t] \gamma_1(t) dt - \right. \\ & - \varphi_1(0) - [\sqrt{2} \psi_3(0) - \varphi_1'(0)] (e-1) - \\ & \left. - [\varphi_5(0) - \sqrt{2} \psi_3(0) + \varphi_1'(0)] (e-2) \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя (2.18) в (2.9), а (2.19) в (2.12), соответственно имеем

$$\begin{aligned} v(x) = & \int_0^x [\exp(x-t) - 1] \gamma_1(t) dt + [\sqrt{2} \psi_3(0) - \\ & - \varphi_1'(0)] \exp x + [\varphi_5(0) - \sqrt{2} \psi_3(0) + \varphi_1'(0)] (\exp x - 1) + \\ & + 2k_{11} (\exp x - 1 - x) - P_x(x, 0) + P_y(x, 0), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mu(x) = & \int_0^x \exp(x-t) \gamma_1(t) dt + \varphi_5(0) \exp x + \\ & + 2k_{11} (\exp x - 1) - \alpha(x, 0). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Таким образом, в области D_1 приходим к задаче (1.2), (1.3), (1.5), (1.14), (1.15), (1.16) для уравнения

$$S_1 S_2 L_1 u_1 = 0, \quad (2.22)$$

где $\tau(x)$, $v(x)$, $\mu(x)$ определяются по формулам (2.17), (2.20), (2.21) соответственно.

Согласно (1.21)–(1.23) для $W_1(x, y)$ получаем задачу

$$\begin{cases} W_{1xx} - W_{1y} = 0, \\ W_1(0, y) = \bar{\varphi}_1(y), \quad W_1(1, y) = \varphi(y), \\ W_1(x, 0) = \bar{\tau}(x), \end{cases}$$

где

$$\bar{\varphi}_1(y) = a_1 a_2 \varphi_5(y) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \varphi_3'(y) + b_1 b_2 \varphi_1''(y),$$

$$\bar{\tau}(x) = a_1 a_2 \tau''(x) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) v'(x) + b_1 b_2 \mu(x),$$

а

$$\varphi(y) = a_1 a_2 u_{1xx}(1, y) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) u_{1xy}(1, y) + b_1 b_2 u_{1yy}(1, y)$$

— пока неизвестная функция.

Пусть пока область D_1 такова, что $h \leq b_1/a_1$. Функция $W_1(x, y)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} W_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} & \left[\int_0^y \bar{\varphi}_1(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \right. \\ & \left. - \int_0^y \varphi(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi \right], \quad (2.23) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} & \left\{ \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp \left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp \left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (1.22), удовлетворяющее условиям

$$v_1(0, y) = a_1 \varphi_3(y) + b_1 \varphi_1'(y), \quad v_1(x, 0) = a_1 \tau'(x) + b_1 v(x),$$

имеет вид

$$v_1(x, y) = \begin{cases} v_{11}(x, y), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{a_1}{b_2} y, \\ v_{12}(x, y), & \text{если } \frac{a_2}{b_2} y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
v_{11}(x, y) &= \frac{1}{b_2} \int_{y - \frac{b_2}{a_2} x}^y W_1 \left(\frac{b_2 x - a_2 y + a_2 z}{b_2}, z \right) dz + \\
&+ a_1 \varphi_3 \left(y - \frac{b_2}{a_2} x \right) + b_1 \varphi_1' \left(y - \frac{b_2}{a_2} x \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{a_2}{b_2} y, \\
v_{12}(x, y) &= \frac{1}{b_2} \int_0^y W_1 \left(\frac{b_2 x - a_2 y + a_2 z}{b_2}, z \right) dz + \\
&+ a_1 \tau' \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2} \right) + b_1 \nu \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2} \right), \quad \frac{a_2}{b_2} y \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

При $b_2 x - a_2 y = 0$ из этих равенств следует $\varphi_3(0) = \tau'(0)$, $\varphi_1(0) = \nu(0)$.

Теперь определим решение уравнения (1.21), удовлетворяющее условиям

$$u_1(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_1(x, 0) = \tau(x).$$

Оно имеет вид

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u_{11}(x, y), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{a_2}{b_2} y, \\ u_{12}(x, y), & \text{если } \frac{a_2}{b_2} y \leq x \leq \frac{a_1}{b_1} y, \\ u_{13}(x, y), & \text{если } \frac{a_1}{b_1} y \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
u_{11}(x, y) &= \frac{1}{b_1 b_2} \int_{y - \frac{b_1}{a_1} x}^y dt \int_{s_3(x, y; t)}^t W_1 \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z \right] dz + \\
&+ \frac{a_1}{b_1} \int_{y - \frac{b_1}{a_1} x}^y \varphi_3 \left[\frac{b_2 (a_1 y - b_1 x) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) t}{a_2 b_1} \right] dt + \frac{a_1}{m_1} \varphi_1 \left(y - \frac{b_1}{a_1} x \right) - \\
&- \frac{a_2 b_1}{b_2 m_1} \varphi_1 \left(y - \frac{b_2}{a_2} x \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{a_2}{b_2} y, \quad (2.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{12}(x, y) = & \frac{1}{b_1 b_2} \int_{y - \frac{b_1}{a_1} x}^{\frac{a_1 y - b_1 x}{m_1}} dt \int_{s_3(x, y; t)}^t W_1 \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z \right] \times \\
& \times dz + \frac{1}{b_1 b_2} \int_{\frac{a_1 y - b_1 x}{m_1}}^y dt \int_0^t W_1 \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z \right] dz + \\
& + \frac{a_1 y - b_1 x}{b_1} \int_{y - \frac{b_1}{a_1} x}^{\frac{a_1 y - b_1 x}{m_1}} \varphi_3 \left[\frac{b_2 (a_1 y - b_1 x) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) t}{a_2 b_1} \right] dt + \\
& + \int_{\frac{a_1 y - b_1 x}{m_1}}^y v \left[\frac{b_2 (b_1 x - a_1 y) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) t}{b_1 b_2} \right] dt + \frac{a_1}{m_1} \left[\varphi_1 \left(y - \frac{b_1}{a_1} x \right) + \right. \\
& \left. + \tau \left(x - \frac{a_2}{b_2} y \right) \right] - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_2 m_1} \varphi_1(0), \quad \frac{a_2}{b_2} y \leq x \leq \frac{a_1}{b_1} y, \quad (2.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{13}(x, y) = & \frac{1}{2 \sqrt{\pi} b_1 b_2} \left\{ \int_0^y dt \int_0^t dz \int_0^z \bar{\varphi}_1(\eta) G_{\xi} \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; \right. \right. \\
& \left. \left. 0, \eta \right] d\eta - \int_0^y dt \int_0^t dz \int_0^z \varphi(\eta) G_{\xi} \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; 1, \eta \right] \times \right. \\
& \times d\eta + \int_0^y dt \int_0^t dz \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; \xi, 0 \right] d\xi \Big\} + \\
& + \int_0^y v \left[\frac{b_2 (b_1 x - a_1 y) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) t}{b_1 b_2} \right] dt + \frac{a_1}{m_1} \tau \left(x - \frac{a_2}{b_2} y \right) - \\
& - \frac{a_2 b_1}{b_2 m_1} \tau \left(x - \frac{a_1}{b_1} y \right), \quad \frac{a_1}{b_1} y \leq x \leq 1, \quad (2.26)
\end{aligned}$$

$$s_3(x, y; t) = \frac{b_2 [a_1 y - b_1 x - m_1 t]}{a_2 b_1}, \quad m_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2}.$$

Теперь, чтобы найти функцию $\varphi(y)$ в формуле (2.26), перейдем к пределу при $x \rightarrow 1$. Затем, дифференцируя полученное ра-

венство трижды, после длинных вычислений получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y K_1(y, \eta) \varphi'(\eta) d\eta = g_1(y), \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(y, \eta) = & \frac{2a_1^2}{b_1^2} \sqrt{\pi} - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \left[\frac{2}{\sqrt{y-\eta}} + H_1(y, \eta) \right] + \\ & + \frac{a_2}{b_2} H_2(y, \eta) - \frac{2a_1^3}{b_1^3} \int_{\eta}^y \left[H_3(y, \eta; t) + \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} H_4(y, \eta; t) - \right. \\ & \left. - \frac{a_2}{b_2} H_5(y, \eta; t) \right] dt + \frac{a_2^2}{b_2^2} \int_{\eta}^y H_6(y, \eta; t) dt + \\ & + \frac{a_1^2}{b_1^2} \left[H_7(y, \eta; y) + \int_{\eta}^y H_{7y}(y, \eta; t) dt \right], \\ H_1(y, \eta) = & \frac{2}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{y-\eta}\right), \\ H_2(y, \eta) = & \int_{\eta}^y G_{\xi} \left(\frac{b_2 - a_2 y + a_2 z}{b_2}, z; 1, \eta \right) dz, \\ H_{i+2}(y, \eta; t) = & \frac{1}{\sqrt{t-\eta}} \exp \left[-\frac{a_i^2 (y-t)^2}{4b_i^2 (t-\eta)} \right], \quad i = 1, 2, \\ H_6(y, \eta; t) = & \int_{\frac{a_1(y-t)}{b_1 \sqrt{t-\eta}}}^{+\infty} \exp \left(-\frac{z^2}{4} \right) dz, \\ H_8(y, \eta; t) = & \int_{\eta}^t \frac{1}{\sqrt{z-\eta}} \exp \left\{ -\frac{[a_1 b_2 (y-t) + a_2 b_1 (t-z)]^2}{4b_1^2 b_2^2 (z-\eta)} \right\} dz, \\ H_7(y, \eta; t) = & \int_{\eta}^y \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_1 b_2 (y-t) + a_2 b_1 (t-z) + 2b_1 b_2 n}{b_1 b_2 (z-\eta)^{3/2}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left\{ - \frac{[a_1 b_2 (y-t) + a_2 b_1 (t-z) + 2b_1 b_2 n]^2}{4b_1^2 b_2^2 (z-\eta)} \right\} dz, \\
& g_1(y) = - \frac{a_1^2 b_2^2 + a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2}{b_1^2 b_2^2} \bar{\tau}(1) + \\
& + \frac{a_1^3}{b_1^2 m_1} \bar{\tau} \left(1 - \frac{a_1}{b_1} y \right) - \frac{a_2^3 b_1}{b_2^2 m_1} \bar{\tau} \left(1 - \frac{a_2}{b_2} y \right) + \\
& + \frac{1}{V\bar{y}} \int_0^y \bar{\tau}'(1 - V\bar{y}t) \exp \left(- \frac{t^2}{4} \right) dt - \\
& - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2\sqrt{\pi} b_1 b_2} \int_0^y \bar{\varphi}'_1(\eta) N(1, y; 0, \eta) d\eta + \\
& + \frac{a_1^2 b_2^2 + a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2}{2\sqrt{\pi} b_1^2 b_2^2} \int_0^y dz \int_0^z \bar{\varphi}'_1(\eta) N_x \left(\frac{b_2 - a_2 y + a_2 z}{b_2}, z; 0, \eta \right) d\eta - \\
& - \frac{a_1^3}{2\sqrt{\pi} b_1^3} \int_0^y dt \int_0^t dz \int_0^z \bar{\varphi}'_1(\eta) N_{xx} \left[\frac{b_1 b_2 - a_1 b_2 (y-t) - a_2 b_1 (t-z)}{b_1 b_2}, z; 0, \eta \right] \times \\
& \times d\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \bar{\tau}'(\xi) H_{20}(y, \xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} q_1'''(y), \\
& H_{20}(y, \xi) = \frac{2(a_1 b_2 + a_2 b_1)}{b_1 b_2} H_8(y, \xi) + \frac{a_2 (a_1^2 b_2^2 + a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2)}{b_1^2 b_2^3} \times \\
& \times [H_9(y, \xi) + H_{10}(y, \xi)] + \frac{a_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1)}{b_1 b_2^2} [H_{11}(y, \xi) - H_{12}(y, \xi)] + \\
& + \frac{a_1^2}{b_1^2} H_{15}(y, \xi) + \frac{a_1^3}{b_1^3} \left\{ [H_{16}(y, \xi) + H_{17}(y, \xi)] + \right. \\
& \left. + \frac{a_2}{b_2} [H_{18}(y, \xi) - H_{19}(y, \xi)] \right\}, \\
& H_8(y, \xi) = \frac{1}{V\bar{y}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left[- \frac{(1-\xi-2n)^2}{4y} \right],
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} H_9(y, \xi) \\ H_{10}(y, \xi) \end{array} \right\} = \int_0^y \frac{1}{Vz} \exp \left\{ - \frac{b_2(1-\xi) \mp a_2(y-z)]^2}{4b_2^2 z} \right\} dz,$$

$$\left. \begin{array}{l} H_{11}(y, \xi) \\ H_{12}(y, \xi) \end{array} \right\} = \int_0^y \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{b_2(1-\xi) \mp a_2(y-z) \mp 2b_2 n}{2b_2 z^{3/2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{[b_2(1-\xi) \mp a_2(y-z) \mp 2b_2 n]^2}{4b_2^2 z} \right\} dz,$$

$$H_{15}(y, \xi) = \int_0^y dt \int_0^t [H_{13}(y, \xi; t, z) + H_{14}(y, \xi; t, z)] dz,$$

$$\left. \begin{array}{l} H_{13}(y, \xi; t, z) \\ H_{14}(y, \xi; t, z) \end{array} \right\} = \pm \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{b_1 b_2(1-\xi) \mp a_1 b_2(y-t) \mp a_2 b_1(t-z) \mp 2b_1 b_2 n}{2b_1 b_2 z^{3/2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{[b_1 b_2(1-\xi) \mp a_1 b_2(y-t) \mp a_2 b_1(t-z) \mp 2b_1 b_2 n]^2}{4b_1^2 b_2^2 z} \right\} dz,$$

$$\left. \begin{array}{l} H_{16}(y, \xi) \\ H_{17}(y, \xi) \end{array} \right\} = \int_0^y \frac{1}{Vt} \exp \left\{ - \frac{[b_1(1-\xi) \mp a_1(y-t)]^2}{4b_1^2 t} \right\} dt,$$

$$\left. \begin{array}{l} H_{18}(y, \xi) \\ H_{19}(y, \xi) \end{array} \right\} = \int_0^y dt \int_0^t \frac{b_1 b_2(1-\xi) \mp a_1 b_2(y-t) \mp a_2 b_1(t-z)}{2b_1 b_2 z^{3/2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{[b_1 b_2(1-\xi) \mp a_1 b_2(y-t) \mp a_2 b_1(t-z)]^2}{4b_1^2 b_2^2 z} \right\} dz,$$

$$N(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{V y - \eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[\frac{(x - \xi - 2n)^2}{4(y - \eta)} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[- \frac{(x + \xi - 2n)^2}{4(y - \eta)} \right] \right\},$$

$$q_1(y) = 2\sqrt{\pi} b_1 b_2 \left\{ \varphi_2(y) - \frac{b_1}{m_1} \left[\frac{a_1}{b_1} \tau \left(1 - \frac{a_2}{b_2} y \right) - \right. \right.$$

$$\left. -\frac{a_2}{b_2} \tau \left(1 - \frac{a_1}{b_1} y \right) + \int_{1-\frac{a_1}{b_1} y}^{1-\frac{a_2}{b_2} y} v(t) dt \right\},$$

здесь и далее $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}$.

Так как функция $g_1(y)$ непрерывна, а ядро $K_1(y, \eta)$ имеет слабую особенность, то уравнение (2.27) допускает единственное решение, принадлежащее классу $C[0, h]$. Его решение запишем в виде

$$\varphi'(y) = g_1(y) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \Gamma_1(y, \eta) g_1(\eta) d\eta,$$

где $\Gamma_1(y, \eta)$ — резольвента ядра $K_1(y, \eta)$. Интегрируя это равенство от 0 до y , получаем

$$\varphi(y) = \int_0^y g_1(t) \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_t^y \Gamma_1(z, t) dz \right] dt + \bar{\tau}(1),$$

здесь положено $\varphi(0) = \bar{\tau}(1)$.

Подставляя $\varphi(y)$ в (2.23), определяем функцию $W_1(x, y)$, а значит и функции $u_{11}(x, y)$, $u_{12}(x, y)$, $u_{13}(x, y)$ по формулам (2.24) — (2.26), т. е. функцию $u_1(x, y)$ в области D_1 определим полностью.

Пусть теперь $h > b_1/a_1$. Тогда область D_1 разделим на $N+1$ частей так, чтобы высоты первых N ($N \geq 1$) областей были равны на $h_0 = b_1/a_1$, а последней не больше, чем h_0 , и задачу решаем последовательно в каждой из этих областей.

Функция $u_2(x, y)$ в области D_2 определяется по формуле

$$u_2(x, y) = \tau(x+y) - P(x+y, 0) + P(x, y). \quad (2.28)$$

б) Пусть теперь $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. Тогда уравнение (1.18) приводится к виду

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \frac{b_2 x + a_2 y}{2a_2 b_2} \omega_{21}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y), \quad (2.29)$$

а его общее решение имеет вид

$$u_2(x, y) = F(x+y) + \Phi(x-y) + \frac{1}{4} \int_0^{x+y} d\xi \int_1^{x-y} \left[\omega_{22} \left(\frac{b_2 - a_2}{2} \xi + \frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) + \frac{1}{2a_2 b_2} \left(\frac{b_2 + a_2}{2} \xi + \frac{b_2 - a_2}{2} \eta \right) \omega_{21} \left(\frac{a_2 - b_2}{2} \xi + \frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) \right] d\eta. \quad (2.30)$$

Подставляя (2.30) в (1.7), (1.9) и (1.11), соответственно получаем (2.2) и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_1^{2x} \left[\omega_{22} \left(\frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) + \frac{b_2 - a_2}{4a_2 b_2} \eta \omega_{21} \left(\frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) \right] d\eta = \\ & = \sqrt{2} \psi_3(x) - 2F'(0), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{b_2 - a_2}{2} \int_1^{2x} \omega'_{22} \left(\frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) d\eta + \frac{b_2 + a_2}{4a_2 b_2} \int_1^{2x} \omega_{21} \left(\frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) d\eta + \\ & + \frac{(b_2 - a_2)^2}{8a_2 b_2} \int_1^{2x} \eta \omega'_{21} \left(\frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) d\eta = 2\psi_5(x) - 4F''(0), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Из этих последних двух уравнений следует (2.3) и

$$\begin{aligned} \omega_{22}(b_2 x - a_2 y) &= \sqrt{2} \psi'_3 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \\ & - \frac{(b_2 - a_2)(b_2 x - a_2 y)}{2a_2 b_2 (b_2 + a_2)} \omega_{21}(b_2 x - a_2 y), \\ (b_2 - a_2) \omega'_{22}(b_2 x - a_2 y) &+ \frac{b_2 + a_2}{2a_2 b_2} \omega_{21}(b_2 x - a_2 y) + \\ & + \frac{(b_2 - a_2)^2 (b_2 x - a_2 y)}{2a_2 b_2 (b_2 + a_2)} \omega'_{21}(b_2 x - a_2 y) = 2\psi'_5 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right). \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{aligned} \omega_{21}(b_2 x - a_2 y) &= (b_2 + a_2) \psi'_5 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \\ & - \frac{b_2 - a_2}{\sqrt{2}} \psi''_3 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\omega_{22}(b_2 x - a_2 y) = \sqrt{2} \psi_3' \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \frac{(b_2 - a_2)(b_2 x - a_2 y)}{2a_2 b_2} \times \\ \times \psi_5' \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) + \frac{(b_2 - a_2)^2 (b_2 x - a_2 y)}{2\sqrt{2} a_2 b_2 (b_2 + a_2)} \psi_3'' \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right). \quad (2.32)$$

Подставляя (2.31) и (2.32) в (2.30), приходим к формуле (2.8), где

$$\alpha(x, y) = \sqrt{2} \psi_3' \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) + (x + y) \left[\psi_5' \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{b_2 - a_2}{\sqrt{2} (b_2 + a_2)} \psi_3'' \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) \right]. \quad (2.33)$$

Функции $\tau(x)$, $v(x)$, $\mu(x)$ и $u_2(x, y)$ определяются аналогично случаю 1. а), а для $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к задаче (1.2), (1.3), (1.5), (1.14), (1.15), (1.16) для уравнения $S_2^2 L_1 u_1 = 0$.

Пусть $h \leq b_2/a_2$. Как в случае 1. а), функцию $u_1(x, y)$ можно записать в виде

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u_{11}(x, y), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{a_2}{b_2} y, \\ u_{12}(x, y), & \text{если } \frac{a_2}{b_2} y \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где

$$u_{11}(x, y) = \frac{1}{b_2^2} \int_{y - \frac{b_2}{a_2} x}^y (y - t) W_1 \left(\frac{b_2 x - a_2 y + a_2 t}{b_2}, t \right) dt + \\ + x \varphi_3 \left(y - \frac{b_2}{a_2} x \right) + \frac{b_2}{a_2} x \varphi_1' \left(y - \frac{b_2}{a_2} x \right) + \\ + \varphi_1 \left(y - \frac{b_2}{a_2} x \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{a_2}{b_2} y, \\ u_{12}(x, y) = \frac{1}{2b_2^2 \sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^y (y - t) dt \int_0^t \bar{\varphi}_1(\eta) \times \right. \\ \times G_\xi \left(\frac{b_2 x - a_2 y + a_2 t}{b_2}, t; 0, \eta \right) d\eta - \int_0^y (y - t) dt \int_0^t \varphi(\eta) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times G_{\xi} \left(\frac{b_2 x - a_2 y + a_2 t}{b_2}, t; 1, \eta \right) d\eta + \int_0^y (y-t) dt \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) \times \\
& \times G \left(\frac{b_2 x - a_2 y + a_2 t}{b_2}, t; \xi, 0 \right) d\xi \Bigg\} + \\
& + \frac{a_2}{b_2} y \tau' \left(x - \frac{a_2}{b_2} y \right) + y \nu \left(x - \frac{a_2}{b_2} y \right) + \\
& + \tau \left(x - \frac{a_2}{b_2} y \right), \quad \frac{a_2}{b_2} y \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

Полагая в последней формуле $x=1$ и поступая так же, как в случае 1. а), приходим к уравнению Вольтерра второго рода относительно $\Phi'(y)$, которое допускает единственное решение. Дальнейшие рассуждения для случая 1. а) имеют место и здесь.

Заметим, что если рассмотреть предельные значения коэффициентов a_i и b_i ($i=1, 2$), т. е. $(a_1-b_1)(a_2-b_2)=0$, то условие (1.7) нельзя заменить условием (1.8). В самом деле, пусть задано условие (1.8). Тогда вместо (2.8) получаем

$$u_2(x, y) = \Phi(x-y) - \Phi(1) + Q(x, y),$$

где

$$Q(x, y) = \psi_2 \left(\frac{x+y+1}{2} \right) + \frac{1}{4} \int_0^{x+y} d\xi \int_1^{x-y} \alpha \left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2} \right) d\eta,$$

вместо (2.9), (2.10), (2.11), (2.14) —

$$\nu(x) = Q_x(x, 0) + Q_y(x, 0) - \tau'(x),$$

$$\nu'(x) = Q_{xx}(x, 0) + Q_{xy}(x, 0) - \tau''(x), \quad (2.34)$$

$$\nu''(x) = Q_{xxx}(x, 0) + Q_{xxy}(x, 0) - \tau'''(x), \quad (2.35)$$

$$\theta(x) = Q_{xxx}(x, 0) + Q_{xxy}(x, 0) - \alpha_y(x, 0) - \tau''(x), \quad (2.36)$$

а из уравнения (2.22) в силу (2.12), (2.13), (2.34)—(2.36) имеем

$$\begin{aligned}
& (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) [\tau'''(x) + \tau''(x)] = h(0) + b_1 b_2 \tau''(0) - \\
& - (a_1 b_2 + a_2 b_1) [Q_{xxx}(x, 0) + Q_{xxy}(x, 0) + \alpha(x, 0)] + \\
& + b_1 b_2 \left[\alpha_x(x, 0) - \int_0^x \alpha_y(t, 0) dt - Q_{xx}(0, 0) - Q_{xy}(0, 0) \right] +
\end{aligned}$$

$$+ (a_1 a_2 + b_1 b_2) [Q_{xx}(x, 0) + Q_{xy}(x, 0)] .$$

Отсюда следует, что если $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = 0$, то нельзя получить уравнение относительно неизвестной функции $\tau(x)$.

2. Случай 2). Без ограничения общности можно положить $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_2 > 0$, $b_2/a_2 > b_1/a_1$. В силу $0 < (b_2 + a_2)/2 < b_2$ имеем

$$0 \leq b_2 x - a_2 y \leq (b_2 + a_2)/2, (x, y) \in D'_{22}, \quad (2.37)$$

$$(b_2 + a_2)/2 \leq b_2 x - a_2 y \leq b_2, (x, y) \in D''_{22}, \quad (2.38)$$

где D'_{22} — треугольник с вершинами $A(0, 0)$, $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $E_2(\frac{b_2 + a_2}{2b_2}, 0)$, а D''_{22} — треугольник с вершинами $B(1, 0)$, $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $E_2(\frac{b_2 + a_2}{2b_2}, 0)$.

При выполнении неравенства (2.37), как в случае 1. а), находим функции $\Phi(x)$, $\omega_{21}(b_1 x - a_1 y)$, $(x, y) \in D_2$, $\omega_{22}(b_2 x - a_2 y)$, $(x, y) \in D'_{22}$. При выполнении неравенства (2.38) функция $\omega_{21}(b_1 x - a_1 y)$ известна, но $\omega_{22}(b_2 x - a_2 y)$ неизвестна. Она определяется с помощью условия (1.10).

Дальнейшее исследование проводится аналогично случаю 1).

3. Случай 3). Без ограничения общности можно положить $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_2 < 0$, $b_2 > 0$. Тогда как в случаях 1) и 2) определяем функции $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$, $u_2(x, y)$.

Для определения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к задаче (2.22), (1.2), (1.3), (1.4), (1.14), (1.15), (1.16).

Пусть пока область D_1 такова, что $h \leq h_0 = b_1/m_1$. Уравнение (2.22) перепишем в виде системы (1.21)–(1.23). Тогда для $W_1(x, y)$ имеем задачу

$$\begin{cases} W_{1xx} - W_{1y} = 0, \\ W_1(0, y) = f_1(y), \quad W_1(1, y) = f_2(y), \\ W_1(x, 0) = \bar{\tau}(x), \end{cases}$$

где $\bar{\tau}(x) = a_1 a_2 \tau''(x) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \nu'(x) + b_1 b_2 \mu(x)$, а $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — пока неизвестные функции. Решение этой задачи имеет вид

$$W_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_0^y f_1(\eta) G_{\pm}(x, y; 0, \eta) d\eta - \right.$$

$$- \int_0^y f_2(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi \Big]. \quad (2.39)$$

Теперь решаем задачу

$$\begin{cases} a_2 v_{1x} + b_2 v_{1y} = W_1(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ v_1(1, y) = a_1 \varphi_4(y) + b_1 \varphi_2'(y), & 0 \leq y \leq h, \\ v_1(x, 0) = a_1 \tau'(x) + b_1 \nu(x), & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

в виде

$$v_1(x, y) = \begin{cases} v_{11}(x, y), & \text{если } 0 \leq x \leq 1 + \frac{a_2}{b_2} y, \\ v_{12}(x, y), & \text{если } 1 + \frac{a_2}{b_2} y < x \leq 1, \end{cases}$$

где

$$v_{11}(x, y) = \frac{1}{b_2} \int_0^y W_1\left(\frac{b_2 x - a_2 y + a_2 z}{b_2}, z\right) dz + a_1 \tau'\left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2}\right) + \\ + b_1 \nu\left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2}\right),$$

если $0 \leq x < 1 + \frac{a_2}{b_2} y$,

$$v_{12}(x, y) = \frac{1}{b_2} \int_{\frac{b_2 - b_2 x + a_2 y}{a_2}}^y W_1\left(\frac{b_2 x - a_2 y + a_2 z}{b_2}, z\right) dz + \\ + a_1 \varphi_4\left(\frac{b_2 - b_2 x + a_2 y}{a_2}\right) + b_1 \varphi_2'\left(\frac{b_2 - b_2 x + a_2 y}{a_2}\right),$$

если $1 + \frac{a_2}{b_2} y \leq x < 1$.

Далее, решая задачу

$$\begin{cases} a_1 u_{1x} + b_1 u_{1y} = v_1(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u_1(0, y) = \varphi_1(y), & 0 \leq y < h, \\ u_1(x, 0) = \tau(x), & 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

НАХОДИМ

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u_{11}(x, y), & \text{если } 0 \leq x < \frac{a_1}{b_1} y, \\ u_{12}(x, y), & \text{если } \frac{a_1}{b_1} y < x \leq 1 + \frac{a_2}{b_2} y, \\ u_{13}(x, y), & \text{если } 1 + \frac{a_2}{b_2} y < x \leq 1, \end{cases} \quad (2.40)$$

где

$$\begin{aligned} u_{11}(x, y) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi} b_1 b_2} \left\{ \int_{y - \frac{b_1}{a_1} x}^y dt \int_0^t dz \int_0^z f_1(\eta) \times \right. \\ & \times G_{\xi} \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; 0, \eta \right] d\eta - \\ & - \int_{y - \frac{b_1}{a_1} x}^y dt \int_0^t dz \int_0^z f_2(\eta) G_{\xi} \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; 1, \eta \right] \times \\ & \times d\eta + \int_{y - \frac{b_1}{a_1} x}^y dt \int_0^t dz \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) \times \\ & \times G \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; \xi, 0 \right] d\xi \Big\} + \\ & + \int_{y - \frac{b_1}{a_1} x}^y v \left[\frac{b_2 (b_1 x - a_1 y) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) t}{b_1 b_2} \right] dt + \frac{a_1}{m_1} \left\{ \tau \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2} \right) - \right. \\ & - \tau \left[\frac{a_2 (b_1 x - a_1 y)}{a_1 b_2} \right] \Big\} + \varphi_1 \left(\frac{a_1 y - b_1 x}{a_1} \right), \quad 0 \leq x < \frac{a_1}{b_1} y, \quad (2.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{12}(x, y) = & \frac{1}{b_1 b_2} \int_0^y dt \int_0^t W_1 \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z \right] dz + \\ & + \int_0^y v \left[\frac{b_2 (b_1 x - a_1 y) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) t}{b_1 b_2} \right] dt + \frac{a_1}{m_1} \tau \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2} \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{a_2 b_1}{b_2 m_1} \tau \left(\frac{b_1 x - a_1 y}{b_1} \right), \quad \frac{a_1}{b_1} y \leq x \leq 1 + \frac{a_2}{b_2} y, \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} u_{13}(x, y) = & \frac{1}{2 \sqrt{\pi} b_1 b_2} \left\{ \int_0^{(b_1 - b_1 x + a_1 y)/m_1} dt \int_0^t dz \int_0^z f_1(\eta) \times \right. \\ & \times G_\xi \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z, 0, \eta \right] d\eta - \\ & - \int_0^{\frac{b_1 - b_1 x + a_1 y}{m_1}} dt \int_0^t dz \int_0^z f_2(\eta) G_\xi \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; 1, \eta \right] d\eta + \\ & + \int_0^{\frac{b_1 - b_1 x + a_1 y}{m_1}} dt \int_0^t dz \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; \xi, 0 \right] d\xi + \\ & + \int_{(b_1 - b_1 x + a_1 y)/m_1}^y dt \int_{s_4(x, y; t)}^t dz \int_0^z f_1(\eta) \times \\ & \times G_\xi \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; 0, \eta \right] d\eta - \\ & - \int_{\frac{b_1 - b_1 x + a_1 y}{m_1}}^y dt \int_{s_4(x, y; t)}^t dz \int_0^z f_2(\eta) \times \\ & \times G_\xi \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; 1, \eta \right] d\eta + \\ & + \int_{\frac{b_1 - b_1 x + a_1 y}{m_1}}^y dt \int_{s_4(x, y; t)}^t dz \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) \times \\ & \times G \left[\frac{b_1 b_2 x - a_1 b_2 (y - t) - a_2 b_1 (t - z)}{b_1 b_2}, z; \xi, 0 \right] d\xi \Big\} + \\ & + \int_0^{\frac{b_1 - b_1 x + a_1 y}{m_1}} v \left[\frac{b_2 (b_1 x - a_1 y) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) t}{b_1 b_2} \right] dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_1}{b_1} \int_{\frac{b_1 - b_1 x + a_1 y}{m_1}}^y \varphi_4 \left[\frac{b_1 b_2 - b_2 (b_1 x - a_1 y) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) t}{a_2 b_1} \right] dt + \\
& + \frac{a_1}{m_1} \tau(1) - \frac{a_2 b_1}{b_2 m_1} \tau \left(x - \frac{a_1}{b_1} y \right) + \frac{a_2 b_1}{m_1 b_2} \varphi_2(0) - \\
& - \frac{a_2 b_1}{b_2 m_1} \varphi_2 \left[y + \frac{b_2}{a_2} (1 - x) \right], \quad 1 + \frac{a_2}{b_2} y < x \leq 1. \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Здесь

$$s_4(x, y; t) = \frac{b_2 [b_1 (1 - x) + a_1 y - m_1 t]}{a_2 b_1}, \quad m_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2}.$$

Дифференцируя (2.41) по x и в полученном равенстве устремляя x к нулю, а в (2.43) — к единице, затем дифференцируя по y первое полученное уравнение дважды, а второе — трижды, соответственно получаем следующую систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $f'_1(y)$ и $f'_2(y)$:

$$\begin{aligned}
& f'_1(y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y K_2(y, \eta) f'_1(\eta) d\eta = \\
& = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y R_1(y, \eta) f'_2(\eta) d\eta + g_2(y), \quad (2.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f'_2(y) + \frac{m_1}{2a_1\sqrt{\pi}} \int_0^y K_3(y, \eta) f'_2(\eta) d\eta = \\
& = - \frac{m_1}{2a_1\sqrt{\pi}} \int_0^y R_2(y, \eta) f'_1(\eta) d\eta + g_3(y), \quad (2.45)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_2(y, \eta) &= \frac{a_2}{b_2 \sqrt{y - \eta}} + \frac{a_2}{b_2} H_1(y, \eta) + \\
&+ \frac{a_2^2}{b_2^2} \int_{\eta}^y G_{\xi} \left[\frac{a_2(z - y)}{b_2}, z; 0, \eta \right] dz,
\end{aligned}$$

$$R_1(y, \eta) = \frac{a_2}{b_2} N(0, y; 1, \eta) + \frac{a_2^2}{b_2^2} \int_{\eta}^y G_{\xi} \left[\frac{a_2(z-y)}{b_2}, z; 1, \eta \right] dz,$$

$$g_1(y) = \frac{a_2^2}{b_2^2} \left[\bar{\tau} \left(-\frac{a_2}{b_2} y \right) - \bar{\tau}(0) \right] - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \bar{\tau}'(\xi) H_{26}(y, \xi) d\xi + \\ + \frac{a_2}{b_2\sqrt{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{y}} \bar{\tau}'(\sqrt{y}t) \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt + a_1 b_2 \left[\varphi_3''(y) + \frac{a_1}{b_1} \varphi_1'''(y) - \right. \\ \left. - \frac{a_2^2}{b_2^2} \tau''' \left(-\frac{a_2}{b_2} y \right) - \frac{a_1 a_2^2}{b_1 b_2^2} \nu'' \left(-\frac{a_2}{b_2} y \right) \right],$$

$$H_{26}(y, \xi) = -\frac{2a_2}{b_2} H_{21}(y, \xi) - \frac{a_2^3}{b_2^3} [H_{22}(y, \xi) + H_{23}(y, \xi)] + \\ + \frac{a_2^2}{b_2^2} [H_{24}(y, \xi) + H_{25}(y, \xi)],$$

$$H_{21}(y, \xi) = \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(\xi + 2n)^2}{4y} \right\},$$

$$\left. \begin{matrix} H_{22}(y, \xi) \\ H_{23}(y, \xi) \end{matrix} \right\} = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y}} \exp \left\{ -\frac{[a_2(y-z) \mp b_2 \xi]^2}{4b_2^2 z} \right\} dz,$$

$$\left. \begin{matrix} H_{24}(y, \xi) \\ H_{25}(y, \xi) \end{matrix} \right\} = \int_0^y \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_2(y-z) \mp b_2 \xi + 2b_2 n}{2b_2 z^{3/2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{[a_2(y-z) \mp b_2 \xi + 2b_2 n]^2}{4b_2^2 z} \right\} dz,$$

$$K_3(y, \eta) = -\frac{2a_1^2}{b_1 m_1} \left[\frac{1}{\sqrt{y-\eta}} + H_1(y, \eta) \right] - \frac{2a_1^3}{b_1^3} \int_{\eta}^{s_5(y, \eta)} \left\{ H_3(y, \eta; t) - \right. \\ \left. + \frac{a_2}{b_2} H_5(y, \eta; t) + \frac{a_2 b_1}{m_1 b_2 \sqrt{t-\eta}} \exp \left[-\frac{a_2^2(t-\eta)}{4b_2^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2a_1} H_{7y}(y, \eta; t) + \frac{a_2^2}{b_2^2} H_6(y, \eta; t) \right\} dt + \frac{a_1^3}{b_1^3 m_1} H_7[y, \eta; s_5(y, \eta)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2a_1^3}{b_1^3} \int_{-\frac{a_1}{b_1} \sqrt{\frac{a_1(y-\eta)}{m_1}}}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{4} \right\} dt, \quad s_5(y, \eta) = \frac{a_1 b_2 y - a_2 b_1 \eta}{b_2 m_1}, \\
R_2(y, \eta) &= -\frac{a_1^2}{b_1 m_1} N(1, y; 0, \eta) + \frac{a_1^3}{b_1^2 m_1} \int_{\eta}^y N_x(1, t; 0, \eta) dt - \\
& - \frac{a_1^3}{b_1^3} \left\{ \int_{s_5(y, \eta)}^y dt \int_{s_4(1, y; t)}^t T_1(y, \eta; t, z) dz + \int_{\eta}^{s_5(y, \eta)} dt \int_{\eta}^t T_1(y, \eta; t, z) dz \right\}, \\
T_{11}^I(y, \eta; t, z) &= N_{xx} \left[\frac{b_1 b_2 - a_1 b_2 (y-t) - a_2 b_1 (t-z)}{b_1 b_2}, z; 0, \eta \right], \\
g_2(y) &= \frac{a_1^2}{b_1^2} \left[\bar{\tau} \left(1 - \frac{a_1}{b_1} y \right) - \left(1 + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} y \right) \bar{\tau}(1) + \right. \\
& \left. + \frac{a_2}{b_2} \int_{1 - \frac{a_1}{b_1} y}^1 \bar{\tau}(\xi) d\xi \right] + \frac{m_1}{2a_1 \sqrt{\pi}} \left[q_2''(y) + \int_0^1 \bar{\tau}'(\xi) H_{29}(y, \xi) d\xi \right], \\
q_2(y) &= 2\sqrt{\pi} b_1 b_2 \left\{ \frac{a_1}{m_1} \varphi_2(y) + \frac{a_2 b_1}{b_2 m_1} \tau \left(1 - \frac{a_1}{b_1} y \right) - \right. \\
& \left. - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_2 m_1} \varphi_2(0) - \frac{b_1}{m_1} \int_{1 - \frac{a_1}{b_1} y}^1 v(t) dt + \frac{a_1 a_2}{b_2 m_1} \int_0^y \varphi_4(t) dt \right\}, \\
H_{29}(y, \xi) &= \frac{a_1^3}{b_1^3} [H_{16}(y, \xi) + H_{17}(y, \xi)] + \\
& + \frac{2a_1^3 a_2}{b_1^3 b_2} \int_0^y \frac{1}{Vz} \exp \left[-\frac{(1-\xi)^2}{4z} \right] dz + \\
& + \frac{a_1^3 a_2}{b_1^3 b_2} \int_0^y dt \int_{\lambda_1(y, \xi, t)}^{\lambda_2(y, \xi, t)} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{4} \right) d\lambda + \frac{a_1^3 a_2^2}{b_1^3 b_2^2} \left\{ \int_0^{\frac{a_1 y}{m_1}} dt \int_0^t [H_{27}(y, \xi; t, z) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + H_{28}(y, \xi; t, z) dz + \int_{\frac{a_1 y}{m_1}}^y dt \int_{s_4(1, y; t)}^t [H_{27}(y, \xi; t, z) + \\
& + H_{28}(y, \xi; t, z)] dz \Big\} + \frac{a_1^2}{b_1^2} \left\{ \int_0^{a_1 y / m_1} dt \int_0^t [H_{13y}(y, \xi; t, z) + \right. \\
& + H_{14y}(y, \xi; t, z)] dz + \int_{\frac{a_1 y}{m_1}}^y dt \int_{s_4(1, y; t)}^t [H_{13y}(y, \xi; t, z) + \\
& \left. + H_{14y}(y, \xi; t, z)] dz \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} H_{27}(y, \xi; t, z) \\ H_{28}(y, \xi; t, z) \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{Vz} \exp \left\{ - \frac{[b_1 b_2 (1 - \xi) \mp a_1 b_2 (y - t) \mp a_2 b_1 (t - z)]^2}{4b_1^2 b_2^2 z} \right\}, \\
\left. \begin{aligned} \lambda_1(y, \xi, t) \\ \lambda_2(y, \xi, t) \end{aligned} \right\} &= \frac{b_1 (1 - \xi) \mp a_2 (y - t)}{b_1 Vt}.
\end{aligned}$$

Так как функции $K_2(y, \eta)$ и $K_3(y, \eta)$ имеют слабые особенности, а функции $g_2(y)$ и $g_3(y)$ непрерывны, то система (2.44), (2.45) интегральных уравнений Вольтерра второго рода имеет единственное решение в классе непрерывных функций. Из этой системы находим функции $f'_1(y)$, $f'_2(y)$ и тем самым функции $f_1(y)$, $f_2(y)$ и $u_1(x, y)$. Функция $u_1(x, y)$ выражается формулами (2.40)–(2.43).

В случае $h > h_0$ задача решается аналогично случаю 1) разделением области D_1 на $N+1$ частей.

4. Случай 4). Без ограничения общности можно положить, $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_2 < 0$, $b_2 > 0$. Тогда выполняются неравенства $0 \leq b_1 x - a_1 y \leq (b_1 + a_1)/2$, $(b_2 + a_2)/2 \leq b_2 x - a_2 y \leq b_2$ для всех $(x, y) \in D_2$.

Общее решение системы (1.18)–(1.20) имеет вид (2.1). Подставляя (2.1) в (1.7), (1.9) и (1.10), соответственно имеем формулы (2.2), (2.4) и

$$\begin{aligned}
\omega_{21} [(b_1 - a_1)x + a_1] + \omega_{22} [(b_2 - a_2)x + a_2] = \\
= -V\sqrt{2} \psi'_{4\frac{1}{2}}(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Из (2.4) и (2.46) получаем

$$\omega_{21}(z_1) + \omega_{22}(z_2) = V\bar{2}\psi'_3\left(\frac{z_1}{b_1+a_1}\right) - V\bar{2}\psi'_4\left(\frac{z_2-a_2}{b_2-a_2}\right) - \\ - \omega_{22}\left[\frac{(b_2+a_2)z_1}{b_1+a_1}\right] - \omega_{21}\left[\frac{(b_1-a_1)z_1}{b_2-a_2} + \frac{b_1+a_1}{2}(1-q)\right], \quad (2.47)$$

где

$$q = \frac{(b_1-a_1)(b_2+a_2)}{(b_1+a_1)(b_2-a_2)} < 1, \quad z_i = b_i x - a_i y, \quad i = 1, 2, \quad (x, y) \in D_2.$$

Итак, мы пришли к функциональному уравнению (2.47) для определения функции $\omega_{21}(z_1) + \omega_{22}(z_2)$, которая удовлетворяет условиям (2.4) и (2.46). Полагая в (2.47) $y = -x$ и $y = x-1$, в силу (2.4) и (2.46) имеем

$$\omega_{21}(z_1) + \omega_{22}(z_2) = A_1(z_1) - [B_1(z_2) + C_1(z_2)] + \\ + D_1(z_1) + \omega_{21}\left[qz_1 + \frac{b_1+a_1}{2}(1-q)\right] + \\ + \omega_{22}\left[qz_2 + \frac{b_2+a_2}{2}(1-q)\right], \quad (2.48)$$

где

$$A_1(z_1) = V\bar{2}\psi'_3\left(\frac{z_1}{b_1+a_1}\right), \quad C_1(z_2) = V\bar{2}\psi'_4\left(\frac{z_2-a_2}{b_2-a_2}\right); \\ B_1(z_2) = V\bar{2}\psi'_3\left[\frac{(b_1-a_1)z_2}{(b_1+a_1)(b_2-a_2)} + \frac{1}{2}(1-q)\right]; \\ D_1(z_1) = V\bar{2}\psi'_4\left[\frac{(b_2+a_2)z_1}{(b_1+a_1)(b_2-a_2)} - \frac{a_2}{b_2-a_2}\right].$$

Аналогично полагая в (2.48) $y = -x$ и $y = x-1$ с учетом (2.4) и (2.46), получаем

$$\omega_{21}(z_1) + \omega_{22}(z_2) = A_1(z_1) - [B_1(z_2) + C_1(z_2)] + \\ + [A_2(z_1) + D_1(z_1)] - C_2(z_2) - \omega_{21}\left[q\frac{b_1-a_1}{b_2-a_2}z_2 + \right. \\ \left. + \frac{b_1+a_1}{2}(1-q^2)\right] - \omega_{22}\left[q\frac{b_2+a_2}{b_1+a_1}z_1 + \frac{b_2+a_2}{2}(1-q)\right],$$

где

$$A_2(z_1) = V\bar{2}\psi'_3\left[\frac{qz_1}{b_1+a_1} + \frac{1}{2}(1-q)\right];$$

$$C_2(z_2) = \sqrt{2}\psi_4' \left[\frac{qz_2}{b_2 - a_2} + \frac{b_2 + a_2}{2(b_2 - a_2)} (1 - q) - \frac{a_2}{b_2 - a_2} \right],$$

и т. д. После $(2m-1)$ -го шага имеем

$$\begin{aligned} \omega_{21}(z_1) + \omega_{22}(z_2) &= A_1(z_1) - [B_1(z_2) + C_1(z_2)] + \\ &+ [A_2(z_1) + D_1(z_1)] - \dots - [B_m(z_2) + C_m(z_2)] + \\ &+ D_m(z_1) + \omega_{21} \left[q^m z_1 + \frac{b_1 + a_1}{2} (1 - q^m) \right] + \\ &+ \omega_{22} \left[q^m z_2 + \frac{b_2 + a_2}{2} (1 - q^m) \right], \end{aligned}$$

где

$$B_m(z_2) = \sqrt{2}\psi_3' \left[q^{m-1} \frac{(b_1 - a_1)z_2}{(b_1 + a_1)(b_2 - a_2)} + \frac{1}{2} (1 - q^m) \right];$$

$$C_m(z_2) = \sqrt{2}\psi_4' \left[q^{m-1} \frac{z_2}{b_2 - a_2} - \frac{b_2 + a_2}{2(b_2 - a_2)} q^{m-1} + \frac{1}{2} \right];$$

$$D_m(z_1) = \sqrt{2}\psi_4' \left[q^{m-1} \frac{(b_2 + a_2)z_1}{(b_1 + a_1)(b_2 - a_2)} - \frac{b_2 + a_2}{2(b_2 - a_2)} q^{m-1} + \frac{1}{2} \right],$$

а после $2m$ -го шага

$$\begin{aligned} \omega_{21}(z_1) + \omega_{22}(z_2) &= A_1(z_1) - [B_1(z_2) + C_1(z_2)] + \\ &+ [A_2(z_1) + D_1(z_1)] - \dots - [B_m(z_2) + C_m(z_2)] + \\ &+ [A_{m+1}(z_1) + D_m(z_1)] - C_{m+1}(z_2) - \\ &- \omega_{21} \left[q^m \frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} z_2 + \frac{b_1 + a_1}{2} (1 - q^{m+1}) \right] - \\ &- \omega_{22} \left[q^m \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} z_1 + \frac{b_2 + a_2}{2} (1 - q^m) \right], \end{aligned}$$

где

$$A_{m+1}(z_1) = \sqrt{2}\psi_3' \left[q^m \frac{z_1}{b_1 + a_1} + \frac{1}{2} (1 - q^m) \right]$$

и т. д.

Легко показать, что при выполнении условия согласования $\psi_3' \left(\frac{1}{2} \right) = -\psi_4' \left(\frac{1}{2} \right)$ и в силу (2.46) имеют места следующие предельные соотношения:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [B_m(z_2) + C_m(z_2)] = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [A_{m+1}(z_1) + D_m(z_1)] = 0,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ D_m(z_1) + \omega_{21} \left[q^m z_1 + \frac{b_1 + a_1}{2} (1 - q^m) \right] + \right. \\ \left. + \omega_{22} \left[q^m z_2 + \frac{b_2 + a_2}{2} (1 - q^m) \right] \right\} = 0,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ C_{m+1}(z_2) + \omega_{21} \left[q^m \frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} z_2 + \frac{b_1 + a_1}{2} (1 - q^{m+1}) \right] + \right. \\ \left. + \omega_{22} \left[q^m \frac{b_2 + a_2}{b_1 + a_1} z_1 + \frac{a_2 + b_2}{2} (1 - q^m) \right] \right\} = 0.$$

Таким образом, мы получили сходящийся ряд

$$\omega_{21}(z_1) + \omega_{22}(z_2) = A_1(z_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n E_n(z_1, z_2),$$

где

$$E_n(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{B_{n+1}}{2}(z_2) + \frac{C_{n+1}}{2}(z_2), & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \frac{A_{n+2}}{2}(z_1) + \frac{D_n}{2}(z_1), & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases}$$

так как он является знакочередующимся рядом и его общий член стремится к нулю. Его первые и вторые производные сходятся абсолютно.

Дальнейшие исследования проводятся аналогично случаю 3).

Отметим, что в предельных значения коэффициентов a_i, b_i ($i = 1, 2$), т. е. $(a_1 - b_1)(a_2 + b_2) = 0$, функция $\omega_{21}(z_1) + \omega_{22}(z_2)$ определяется легко. Здесь имеет место утверждение замечания 1.2.

5. Случай 5). Без ограничения общности можно положить $a_1 > 0, b_1 > 0, a_2 > 0, b_2 > 0, b_2/a_2 \geq b_1/a_1$. Тогда выполняются неравенства $0 < (b_1 + a_1)/2 < b_1, 0 < (b_2 + a_2)/2 < b_2, 0 \leq b_1 x - a_1 y \leq (b_1 + a_1)/2, (x, y) \in D'_{21}, (b_1 + a_1)/2 \leq b_1 x - a_1 y \leq b_1, (x, y) \in D''_{21}$ и (2.37), (2.38), где D'_{21} — треугольник с вершинами $A, C, E_1 \left(-\frac{b_1 + a_1}{2b_1}, 0 \right)$, D''_{21} — треугольник с вершинами B, C, E_1 .

Пусть $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Тогда общее решение уравнения (1.18) имеет вид (2.1). Удовлетворяя условиям (1.9), (1.11) и (1.10), (1.12), находим

$$\omega_{21}(b_1x - a_1y) + \omega_{22}(b_2x - a_2y) = q(x, y),$$

где

$$q(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, y), & \text{если } (x, y) \in D'_{22}, \\ \gamma(x, y), & \text{если } (x, y) \in D'_{21} \cap D''_{22}, \\ \beta(x, y), & \text{если } (x, y) \in D''_{21}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta(x, y) = & -V\sqrt{2}\psi'_4\left(\frac{b_2x - a_2y - a_2}{b_2 - a_2}\right) - \frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{a_1b_2 - a_2b_1} \times \\ & \times \left\{ \psi_6\left(\frac{b_2x - a_2y - a_2}{b_2 - a_2}\right) - \psi_6\left(\frac{b_1x - a_1y - a_1}{b_1 - a_1}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{b_1 + a_1}{V\sqrt{2}(b_1 - a_1)} \left[\psi'_4\left(\frac{b_2x - a_2y - a_2}{b_2 - a_2}\right) - \psi'_4\left(\frac{b_1x - a_1y - a_1}{b_1 - a_1}\right) \right] \right\}, \\ \gamma(x, y) = & -V\sqrt{2}\psi'_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{(b_1 + a_1)(b_2 + a_2)}{a_1b_2 - a_2b_1} \left\{ \psi_5\left(\frac{b_1x - a_1y}{b_1 + a_1}\right) - \right. \\ & - \psi_5\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{b_2 - a_2}{V\sqrt{2}(b_2 + a_2)} \left[\psi_3\left(\frac{b_1x - a_1y}{b_1 + a_1}\right) - \psi_3\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \\ & - \frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{a_1b_2 - a_2b_1} \left\{ \psi_6\left(\frac{b_2x - a_2y - a_2}{b_2 - a_2}\right) - \psi_6\left(\frac{1}{2}\right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{b_1 + a_1}{V\sqrt{2}(b_1 - a_1)} \left[\psi'_4\left(\frac{b_2x - a_2y - a_2}{b_2 - a_2}\right) - \psi'_4\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

а функция $\alpha(x, y)$ определяется как в случае 1. а) (см. формулу (2.7)).

Дальнейшее исследование проводится аналогично случаю 1. а).

Пусть теперь $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Тогда общее решение уравнения (1.18) имеет вид (2.30). Удовлетворяя условиям (1.9), (1.11) и (1.10), (1.12), имеем

$$\frac{b_2x + a_2y}{2a_2b_2} \omega_{21}(b_2x - a_2y) + \omega_{22}(b_2x - a_2y) = q(x, y),$$

где

$$q(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, y), & \text{если } (x, y) \in D'_{22} = D'_{21}, \\ \beta(x, y), & \text{если } (x, y) \in D''_{22} = D''_{21}, \end{cases}$$

$$\beta(x, y) = -V\sqrt{2}\psi'_4\left(\frac{b_2x - a_2y - a_2}{b_2 - a_2}\right) + (x - y - 1) \times$$

$$\times \left[\psi_6' \left(\frac{b_2 x - a_2 y - a_2}{b_2 - a_2} \right) + \frac{b_2 + a_2}{\sqrt{2}(b_2 - a_2)} \psi_4'' \left(\frac{b_2 x - a_2 y - a_2}{b_2 - a_2} \right) \right],$$

а $\alpha(x, y)$ определяется формулой (2.33).

Дальнейшее исследование проводится аналогично случаю 1.6).

В случае 6) функция $u_2(x, y)$ определяется аналогично случаю 5), а $u_1(x, y)$ — случаю 3).

§ 3. Исследование случаев, когда характеристика оператора S_1 параллельна оси y

1. Случай 7). Без ограничения общности можно положить $a_2 > 0$, $b_2 > 0$. Тогда выполняется неравенство $0 \leq b_2 x - a_2 y \leq (b_2 + a_2)/2$, $(x, y) \in D_2$.

Уравнение (1.18) можно переписать в виде

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_{21}(x) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y).$$

Его общее решение

$$u_2(x, y) = F(x + y) + \Phi(x - y) + \frac{1}{4} \int_0^{x+y} d\xi \times \\ \times \int_1^{x-y} \left[\omega_{21} \left(\frac{\xi + \eta}{2} \right) + \omega_{22} \left(\frac{b_2 - a_2}{2} \xi + \frac{b_2 + a_2}{2} \eta \right) \right] d\eta. \quad (3.1)$$

Удовлетворяя условиям (1.9), (1.10) и (1.11), получаем

$$\omega_{21}(x) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y) = \alpha(x, y),$$

где

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \alpha_1(x, y), & \text{если } (x, y) \in D_{21}', \\ \alpha_2(x, y), & \text{если } (x, y) \in D_{21}'', \end{cases} \\ \alpha_1(x, y) = \frac{b_2 + a_2}{2} \left[\psi_5(x) - \psi_5 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) \right] + \\ + \frac{b_2 + a_2}{\sqrt{2} a_2} \psi_3' \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \frac{b_2 + a_2}{\sqrt{2} a_2} \psi_3'(x), \quad (3.2) \\ \alpha_2(x, y) = \frac{b_2 + a_2}{\sqrt{2} a_2} \left\{ \psi_3' \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \psi_3' \left[\frac{(b_2 - a_2)x + a_2}{b_2 + a_2} \right] \right\} - \\ - \frac{b_2 + a_2}{a_2} \left\{ \psi_5 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \psi_5 \left[\frac{(b_2 - a_2)x + a_2}{b_2 + a_2} \right] \right\} - \sqrt{2} \psi_4'(x),$$

а D'_{21} — треугольник с вершинами $A, C, E_1 \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$,

D''_{21} — треугольник с вершинами B, C, E_1 .

Далее, рассуждая как в случае 1. а), определяем функции $\tau(x)$, $v(x)$, $\mu(x)$, $u_2(x, y)$, а для нахождения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к задаче (1.1), (1.2), (1.3), (1.14), (1.15), (1.16).

Полагая $u_{1y} = v(x, y)$, для $v(x, y)$ имеем задачу

$$\begin{cases} \left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) L_1 v = 0, \\ v(0, y) = \varphi'_1(y), \quad v(1, y) = \varphi'_2(y), \quad v_x(0, y) = \varphi'_3(y), \\ v(x, 0) = v(x), \quad v_y(x, 0) = \mu(x), \end{cases}$$

которая изучена в § 3 главы 4.

2. Случай 8). Без ограничения общности можно положить $a_2 > 0$, $b_2 > 0$. Тогда выполняются неравенства (2.37) и (2.38). Как в случае 5), удовлетворяя условиям (1.9), (1.11) и (1.10), (1.12), из общего решения (3.1) находим

$$\omega_{21}(x) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y) = \alpha(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \begin{cases} \alpha_1(x, y), & \text{если } (x, y) \in D'_{21}, \\ \beta(x, y), & \text{если } (x, y) \in D''_{22}, \\ \gamma(x, y), & \text{если } (x, y) \in D'_{21} \cap D'_{22}, \end{cases} \\ \beta(x, y) &= \frac{b_2 - a_2}{\sqrt{2} a_2} \left\{ \psi'_4 \left(\frac{b_2 x - a_2 y - a_2}{b_2 - a_2} \right) - \psi'_4(x) + \right. \\ &+ \sqrt{2} \left[\psi_6 \left(\frac{b_2 x - a_2 y - a_2}{b_2 - a_2} \right) - \psi_6(x) \right] \left. \right\} - \sqrt{2} \psi'_4(x), \\ \gamma(x, y) &= \frac{b_2 + a_2}{\sqrt{2} a_2} \psi'_3 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \frac{b_2 - a_2}{\sqrt{2} a_2} \psi'_3 \left(\frac{1}{2} \right) - \\ &- \frac{b_2 + a_2}{\sqrt{2} a_2} \left[\psi'_4(x) - \psi'_4 \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{b_2 + a_2}{a_2} \left[\psi_5 \left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2} \right) - \right. \\ &\left. - \psi_5 \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{b_2 - a_2}{a_2} \left[\psi_6(x) - \psi_6 \left(\frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

$\alpha_1(x, y)$ дается по формуле (3. 2), D'_{21} и D''_{21} определяются как в случае 7), а D'_{22} и D''_{22} — как в случае 2).

Дальнейшее исследование проводится аналогично случаю 7).

3. Случай 9). Уравнение (1.18) можно переписать в виде

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_{21}(x)y + \omega_{22}(x).$$

Записывая общее решение этого уравнения и удовлетворяя условиям (1.9), (1.11) и (1.10), (1.12), получаем

$$\omega_{21}(x)y + \omega_{22}(x) = \alpha(x, y),$$

где

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \alpha_1(x, y), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha_2(x, y), & \text{если } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\alpha_1(x, y) = \sqrt{2} \psi'_3(x) + (x+y) \left[\psi'_5(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \psi''_3(x) \right],$$

$$\alpha_2(x, y) = (x-y-1) \left[\psi'_6(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi''_4(x) \right] - \sqrt{2} \psi'_4(x).$$

Далее, как в предыдущих случаях, находим функции $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$, $u_2(x, y)$. Тогда для определения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к задаче (1.2), (1.14), (1.15), (1.16) для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_{1xx} - u_{1y}) = 0.$$

Полагая в этом уравнении $u_{1yy} = W_1(x, y)$, для $W_1(x, y)$ получаем первую краевую задачу

$$\begin{cases} W_{1xx} - W_{1y} = 0, \\ W_1(0, y) = \varphi''_1(y), \quad W_1(1, y) = \varphi''_2(y), \\ W_1(x, 0) = \mu(x). \end{cases}$$

Тогда функция $u_1(x, y)$ определяется по формуле

$$u_1(x, y) = \int_0^y (y-t) W_1(x, t) dt + \nu(x)y + \tau(x).$$

§ 4. Исследование случаев, когда характеристика оператора S_1 параллельна оси x

1. Случай 10). Без ограничения общности можно положить $a_2 > 0$, $b_2 > 0$. Тогда выполняется неравенство $0 \leq b_2 x - a_2 y \leq (b_2 + a_2)/2$, $(x, y) \in D_2$.

Уравнение (1.18) можно переписать в виде

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_{21}(y) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y).$$

Его общее решение имеет вид

$$u_2(x, y) = F(x + y) + \Phi(x - y) + \\ + \frac{1}{4} \int_0^{x+y} d\xi \int_1^{x-y} \left[\omega_{21}\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) + \omega_{22}\left(\frac{b_2 - a_2}{2} \xi + \frac{b_2 + a_2}{2} \eta\right) \right] d\eta. \quad (4.1)$$

Удовлетворив условиям (1.9) и (1.10), после некоторых выкладок приходим к функциональному уравнению

$$\omega_{21}(y) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y) = \sqrt{2} \psi'_3(-y) - \\ - \sqrt{2} \psi'_4\left(\frac{b_2 x - a_2 y - a_2}{b_2 - a_2}\right) - \omega_{21}\left(\frac{b_2 x - a_2 y - b_2}{b_2 - a_2}\right) - \\ - \omega_{22}[-(b_2 + a_2)y].$$

Как в случае 4), из этого уравнения определяем функцию $\omega_{21}(y) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y)$ в виде сходящегося ряда. Заметим, что если вместо условия (1.10) берем условие (1.11), то функция $\omega_{21}(y) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y)$ определяется легко.

Дальше, рассуждая как в случае 1.а), определяем функцию $\tau(x)$, $v(x)$, $u_2(x, y)$. Здесь следует отметить, что при получении уравнения относительно $\tau(x)$ нам достаточно воспользоваться условиями склеивания (1.14), (1.15) и (1.16). Тогда для нахождения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к задаче (1.2), (1.3), (1.5), (1.14), (1.15) для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) L_1 u_1 = 0.$$

Пусть пока $h \leq b_2/a_2$. Введя обозначение

$$a_2 u_{1xx} + b_2 u_{1xy} = v(x, y),$$

для определения $v(x, y)$ получаем задачу

$$\begin{cases} v_{xx} - v_y = 0, \\ v(0, y) = \bar{\varphi}_1(y), \quad v(1, y) = \varphi(y), \\ v(x, 0) = \bar{\tau}(x), \end{cases}$$

где $\bar{\varphi}_1(y) = a_2 \varphi_5(y) + b_2 \varphi_3(y)$, $\bar{\tau}(x) = a_2 \tau''(x) + b_2 \tau'(x)$, а $\varphi(y)$ — пока неизвестная функция.

Учитывая формулу решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, функцию $u_1(x, y)$ можем записать в виде

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u_{11}(x, y), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{a_2}{b_2} y, \\ u_{12}(x, y), & \text{если } \frac{a_2}{b_2} y \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} u_{11}(x, y) &= \frac{1}{b_2} \int_{y - \frac{b_2}{a_2} x}^y dt \int_0^{\frac{b_2 x - a_2 y + a_2 t}{b_2}} v(z, t) dz + \\ &+ \frac{a_2}{b_2} \int_{y - \frac{b_2}{a_2} x}^y \varphi_3(t) dt + \varphi_1(y), \\ u_{12}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} b_2} \int_0^y dt \int_0^{\frac{b_2 x - a_2 y + a_2 t}{b_2}} \left[\int_0^t \bar{\varphi}(\eta) G_\xi(z, t; 0, \eta) d\eta - \right. \\ &- \left. \int_0^t \varphi(\eta) G_\xi(z, t; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G(z, t; \xi, 0) d\xi \right] dz + \\ &+ \frac{a_2}{b_2} \int_0^y \varphi_3(t) dt + \varphi_1(y) - \varphi_1(0) + \tau\left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2}\right). \end{aligned}$$

В последней формуле полагая $x=1$ и дифференцируя полученное уравнение, имеем

$$- \int_0^1 dz \int_0^y \varphi(\eta) G_\xi(z, y; 1, \eta) d\eta +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2}{b_2} \int_0^y dt \int_0^t \varphi(\eta) G_\xi \left(\frac{b_2 - a_2(y-t)}{b_2}, t; 1, \eta \right) d\eta = \\
& = - \int_0^1 dz \int_0^y \bar{\varphi}_1(\eta) G_\xi(z, y; 0, \eta) d\eta + \\
& + \frac{a_2}{b_2} \int_0^y dt \int_0^t \bar{\varphi}_1(\eta) G_\xi \left(\frac{b_2 - a_2(y-t)}{b_2}, t; 0, \eta \right) d\eta - \\
& - \int_0^1 dz \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G(z, y; \xi, 0) d\xi + \\
& + \frac{a_2}{b_2} \int_0^y dt \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) G \left[\frac{b_2 - a_2(y-t)}{b_2}, t; \xi, 0 \right] d\xi + \\
& + 2 \sqrt{\pi} b_2 \left[\varphi_2'(y) - \varphi_1'(y) + \frac{a_2}{b_2} \tau' \left(1 - \frac{a_2}{b_2} y \right) - \frac{a_2}{b_2} \varphi_3(y) \right].
\end{aligned}$$

Применив известную формулу обращения Абеля к этому уравнению, после ряда вычислений приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) + \int_0^y K_4(y, \eta) \varphi(\eta) d\eta = g_4(y), \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned}
K_4(y, \eta) &= - \frac{a_2}{b_2 \sqrt{\pi(y-\eta)}} + \frac{1}{2\pi} \int_\eta^y \frac{E_{5s}(s, \eta)}{\sqrt{y-s}} ds, \\
g_4(y) &= - \bar{\varphi}_1(y) + \frac{1}{2\pi} \int_0^y \bar{\varphi}_1(\eta) d\eta \int_\eta^y \frac{E_{9s}(s, \eta)}{\sqrt{y-s}} ds + \\
& + \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} t \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt \int_0^{yt^2} B_1(y, t; z) dz + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{+\infty} t \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt \int_{yt^2-1}^{yt^2} B_1(y, t; z) dz -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{2}{\sqrt{y}}} t \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt \int_0^{yt^2-1} B_2(y, t; z) dz - \\
& -\frac{1}{4\pi} \int_{\frac{2}{\sqrt{y}}}^{+\infty} t \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt \int_{yt^2-4}^{yt^2-1} B_2(y, t; z) dz + \\
& + \frac{1}{2\pi} B_3(y) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) d\xi \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-s}} \cdot \frac{\partial E_{13}(s, \xi)}{\partial s} ds + \\
& + \frac{b_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi_2''(s) - \varphi_1''(s) - \frac{a_2^2}{b_2^2} \tau''\left(1 - \frac{a_2}{b_2} s\right) - \frac{a_2}{b_2} \varphi_3'(s)}{\sqrt{y-s}} ds,
\end{aligned}$$

$$E_5(y, \eta) = E_2(y, \eta) + \frac{a_2}{b_2} E_4(y, \eta) - \frac{2a_2\sqrt{\pi}}{b_2},$$

$$E_2(y, \eta) = -\frac{2}{\sqrt{y-\eta}} \exp\left[-\frac{1}{4(y-\eta)}\right] - \int_0^1 E_1(y, \eta; t) dt,$$

$$E_1(y, \eta; t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{t-1-2n}{(y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(t-1-2n)^2}{4(y-\eta)}\right],$$

$$E_4(y, \eta) = \int_{\eta}^y \left[\frac{2a_2}{b_2} H_4(y, \eta; t) - E_3(y, \eta; t) \right] dt,$$

$$E_3(y, \eta; t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_2(y-t) + 2b_2n}{b_2(t-\eta)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{[a_2(y-t) + 2b_2n]^2}{4b_2^2(t-\eta)}\right\},$$

$$E_9(y, \eta) = E_7(y, \eta) + E_8(y, \eta),$$

$$E_7(y, \eta) = \frac{2}{\sqrt{y-\eta}} \exp\left[-\frac{1}{4(y-\eta)}\right] - \int_0^1 E_6(y, \eta; t) dt,$$

$$E_6(y, \eta; t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{t-2n}{(y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(t-2n)^2}{4(y-\eta)}\right],$$

$$E_8(y, \eta) = \frac{a_2}{b_2} \int_{\eta}^y G_{\xi} \left[\frac{b_2 - a_2(y-t)}{b_2}, t; 0, \eta \right] dt,$$

$$E_{13}(y, \xi) = \int_0^1 \left[\frac{a_2}{b_2} E_{12}(y, \xi; t) - E_{10}(y, \xi; t) + E_{11}(y, \xi; t) \right] dt,$$

$$E_{10}(y, \xi; t) = \frac{1}{V^y} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(t-\xi-2n)^2}{4y} \right],$$

$$E_{11}(y, \xi; t) = \frac{1}{V^y} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(t+\xi-2n)^2}{4y} \right],$$

$$E_{12}(y, \xi; t) = \frac{1}{V^t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{[b_2(1-\xi) - a_2(y-t) - 2b_2n]^2}{4b_2^2 t} \right\} -$$

$$- \frac{1}{V^t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{[b_2(1-\xi) + a_2(y-t) + 2b_2n]^2}{4b_2^2 t} \right\},$$

$$B_1(y, t; z) = \frac{\bar{\tau}(1 - \sqrt{yt^2 - z})}{V^z(yt^2 - z)},$$

$$B_2(y, t; z) = \frac{\bar{\tau}(\sqrt{yt^2 - z} - 1) + \bar{\tau}(2 - \sqrt{yt^2 - z})}{V^z(yt^2 - z)},$$

$$B_3(y) = \frac{a_2^3}{b_2^3} \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) d\xi \int_0^y \frac{H_9(z, \xi) - H_{10}(z, \xi)}{V^{y-z}} dz +$$

$$+ \frac{a_2^2}{b_2^2} \int_0^y \frac{dz}{V^{y-z}} \int_0^{1 - \frac{a_2}{b_2} z} \bar{\tau}(\xi) d\xi \int_{\frac{1-\xi}{V^z}}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{4} \right) d\lambda +$$

$$+ \frac{a_2^2}{b_2^2} \int_0^y \frac{dz}{V^{y-z}} \int_0^1 \bar{\tau}(\xi) d\xi \int_{\frac{1-\xi}{V^z}}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{4} \right) d\lambda -$$

$$-\frac{a_2^2}{b_2^2} \int_0^y \frac{dz}{V y-z} \int_{1-\frac{a_2}{b_2}z}^1 \bar{\tau}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\frac{1-\xi}{Vz}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) d\lambda,$$

здесь и далее $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty}$.

Решая уравнение (4.2), находим функцию $\varphi(y) \in C[0, h]$ и тем самым функцию $u_1(x, y)$.

В предельном случае $\gamma_2 = 1$ ($a_2 = b_2 = 1$) функция $\omega_{21}(y) + \omega_{22}(x - y)$ определяется легко:

$$\begin{aligned} \omega_{21}(y) + \omega_{22}(x - y) = V\sqrt{2} \left[\psi'_3\left(\frac{x-y}{2}\right) + \right. \\ \left. + \psi'_4\left(\frac{2-x+y}{2}\right) - \psi'_4(y+1) \right]. \end{aligned}$$

Дальнейшее исследование проводится как и раньше.

Отметим, что в этом случае нельзя задавать функцию $u(x, y)$ на ВС.

2. Случай 11). Без ограничения общности можно положить $a_2 > 0$, $b_2 > 0$. Тогда выполняются неравенства $0 < (b_2 + a_2)/2 < b_2$, (2.37) и (2.38).

Подставляя (4.1) в (1.9), (1.10) и (1.11), находим

$$\omega_{21}(y) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y) = \alpha(x, y),$$

где

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \alpha_1(x, y), & \text{если } (x, y) \in D'_{22}, \\ \alpha_2(x, y), & \text{если } (x, y) \in D''_{22}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, y) = V\sqrt{2} \psi'_3\left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2}\right) + \frac{b_2 - a_2}{V\sqrt{2} b_2} \left[\psi'_3(-y) - \right. \\ \left. - \psi'_3\left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2}\right) - \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left[\psi_5(-y) - \psi_5\left(\frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 + a_2}\right) \right] \right], \\ \alpha_2(x, y) = -V\sqrt{2} \psi'_4\left(\frac{b_2 x - a_2 y - a_2}{b_2 - a_2}\right) + \frac{b_2 - a_2}{V\sqrt{2} b_2} \left[\psi'_3(-y) - \right. \\ \left. - \psi'_3\left(\frac{b_2 - b_2 x + a_2 y}{b_2 - a_2}\right) \right] - \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left[\psi_5(-y) - \psi_5\left(\frac{b_2 - b_2 x + a_2 y}{b_2 - a_2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Дальнейшее исследование проводится аналогично случаю 10).

3. Случай 12). В этом случае уравнение (1.18) перепишем в виде

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_{21}(x) + \omega_{22}(y).$$

Записывая общее решение этого уравнения и удовлетворяя условиям (1.9) и (1.10), находим

$$\omega_{21}(x) + \omega_{22}(y) = \alpha(x, y),$$

где

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \alpha_1(x, y), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha_2(x, y), & \text{если } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\alpha_1(x, y) = \psi_5(x) - \psi_5(-y) + \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi'_3(x) + \psi'_3(-y)],$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(x, y) = & \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi'_3(-y) - \psi'_3(1-x)] - \sqrt{2} \psi'_4(x) + \\ & + \psi_5(1-x) - \psi_5(-y). \end{aligned}$$

Как в случае 10), находим функции $\tau(x)$, $v(x)$ и $u_2(x, y)$. Тогда для определения функции $u_1(x, y)$ в области D_1 приходим к задаче (1.2), (1.3), (1.14), (1.15) для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (u_{1xx} - u_{1y}) = 0.$$

Полагая $u_1 y = v(x, y)$, получаем задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (v_{xx} - v_y) = 0, \\ v(0, y) = \varphi'_1(y), \quad v(1, y) = \varphi'_2(y), \\ v_x(0, y) = \varphi'_3(y), \quad v(x, 0) = v(x), \end{cases}$$

которая исследована в § 3 главы 4. Тогда $u_1(x, y)$ определяется по формуле

$$u_1(x, y) = \int_0^y v(x, t) dt + \tau(x).$$

4. Случай 13). Уравнение (1.18) перепишем в виде

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_{21}(y)x + \omega_{22}(y).$$

Из общего решения этого уравнения и из условий (1.9) и (1.10) находим

$$\omega_{21}(y)x + \omega_{22}(y) = \alpha(x, y),$$

где

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \alpha_1(x, y), & \text{если } x \neq \frac{1}{2}, y \neq -\frac{1}{2}, \\ \alpha_2(y), & \text{если } x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\alpha_1(x, y) = \frac{\sqrt{2}(y-x+1)}{2y+1} [\psi'_3(-y) + \psi'_4(y+1)] - \sqrt{2}\psi'_4(y+1),$$

$$\alpha_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi'_3(-y) - \psi'_4(y+1)].$$

Таким образом, функция $u_2(x, y)$ имеет вид (2.8). Отсюда при $y \rightarrow -0$ находим первое соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из области D_2 по формуле (2.9), а из уравнения (1.1) при $y \rightarrow +0$ имеем второе соотношение между этими функциями, принесенное из области D_1 :

$$\tau''(x) - v(x) = \omega_{11}(0)x + \omega_{12}(0),$$

где $\omega_{11}(0)$ и $\omega_{12}(0)$ — произвольные постоянные, подлежащие определению. Исключая из этих уравнений функцию $v(x)$, получаем

$$\tau''(x) - \tau'(x) = P_x(x, 0) - P_y(x, 0) + \omega_{11}(0)x + \omega_{12}(0).$$

Интегрируя это уравнение, приходим к уравнению

$$\tau'(x) - \tau(x) = \gamma(x) + k_{11}x^2 + k_{12}x + k_{13},$$

где

$$\gamma(x) = P(x, 0) - P(0, 0) - \int_0^x P_y(t, 0)dt,$$

а $k_{11} = \omega_{11}(0)/2$, $k_{12} = \omega_{12}(0)$, $k_{13} = \tau'(0) - \tau(0)$ — произвольные постоянные, подлежащие определению. Решая это уравнение при условиях $\tau(0) = \varphi_1(0)$, $\tau(1) = \varphi_2(0)$, $\tau'(0) = \sqrt{2}\psi_3(0) - \varphi'_1(0)$, $\tau''(0) = \varphi_3(0)$, находим функцию $\tau(x)$.

Итак, для определения функции $u_1(x, y)$ приходим к задаче (1.2), (1.3), (1.4), (1.14) для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{1xx} - u_{1y}) = 0.$$

Введем обозначения $u_{1xx} = W_1(x, y)$. Тогда получаем задачу

$$\begin{cases} W_{1xx} - W_{1y} = 0, \\ W_1(0, y) = f_1(y), \quad W_1(1, y) = f_2(y), \\ W_1(x, 0) = \tau''(x), \end{cases}$$

где $f_1(y)$, $f_2(y)$ — произвольные непрерывные функции. Решение этой задачи запишем в виде

$$W_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_0^y f_1(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y f_2(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \tau''(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi \right].$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} u_{1x}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x \left[\int_0^y f_1(\eta) G_\xi(t, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y f_2(\eta) G_\xi(t, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \tau''(\xi) G(t, y; \xi, 0) d\xi \right] dt + \varphi_3(y), \\ u_1(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-t) \left[\int_0^y f_1(\eta) G_\xi(t, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y f_2(\eta) G_\xi(t, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \tau''(\xi) G(t, y; \xi, 0) d\xi \right] dt + \\ &\quad + \varphi_3(y)x + \varphi_1(y). \end{aligned}$$

Полагая в последних двух формулах $x=1$ и применяя известную формулу обращения Абеля к полученным уравнениям, после некоторых вычислений приходим к системе интегральных уравнений Вольterra второго рода относительно $f_1(y)$, $f_2(y)$:

$$f_1(y) + \int_0^y K_5(y, \eta) f_1(\eta) d\eta + f_2(y) - \int_0^y R_8(y, \eta) f_2(\eta) d\eta = g_5(y), \quad (4.3)$$

$$f_2(y) + \int_0^y K_6(y, \eta) f_2(\eta) d\eta - \int_0^y R_4(y, \eta) f_1(\eta) d\eta = g_6(y), \quad (4.4)$$

где

$$K_5(y, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^y \frac{1}{\sqrt{y-z}} \cdot \frac{\partial E_{15}(z, \eta)}{\partial z} \cdot dz,$$

$$E_{15}(y, \eta) = \int_0^1 E_6(y, \eta; t) dt - E_{14}(y, \eta),$$

$$E_{14}(y, \eta) = \frac{2}{\sqrt{y-\eta}} \exp \left[-\frac{1}{4(y-\eta)} \right],$$

$$R_8(y, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^y \frac{1}{\sqrt{y-z}} \cdot \frac{\partial E_{16}(z, \eta)}{\partial z} \cdot dz,$$

$$E_{16}(y, \eta) = E_{14}(y, \eta) + \int_0^1 E_1(y, \eta; t) dt,$$

$$\begin{aligned} g_5(y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi_4'(z) - \varphi_2'(z)}{\sqrt{y-z}} dz + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} t \exp \left(-\frac{t^2}{4} \right) dt \times \\ &\times \int_0^{yt^2} B_4(y, t; z) dz + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{+\infty} t \exp \left(-\frac{t^2}{4} \right) dt \int_{yt^2-1}^{yt^2} B_4(y, t; z) dz - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{2}{\sqrt{y}}} t \exp \left(-\frac{t^2}{4} \right) dt \int_0^{yt^2-1} B_6(y, t; z) dz - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{2}{\sqrt{y}}}^{+\infty} t \exp \left(-\frac{t^2}{4} \right) dt \int_{yt^2-4}^{yt^2-1} B_6(y, t; z) dz - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \tau''(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{y-z}} \int_0^1 \left[\frac{\partial E_{10}(z, \xi; t)}{\partial z} - \frac{\partial E_{11}(z, \xi; t)}{\partial z} \right] dt, \\ B_6(y, t; z) &= B_5(y, t; z) + \frac{\tau''(2 - \sqrt{yt^2 - z})}{\sqrt{z(yt^2 - z)}}, \end{aligned}$$

$$B_4(y, t; z) = \frac{\tau''(1 - \sqrt{yt^2 - z})}{\sqrt{z(yt^2 - z)}},$$

$$B_5(y, t; z) = \frac{\tau''(\sqrt{yt^2 - z} - 1)}{\sqrt{z(yt^2 - z)}},$$

$$K_6(y, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^y \frac{1}{(z - \eta)^{3/2} \sqrt{y - z}} \exp \left[-\frac{1}{4(z - \eta)} \right] dz - \\ - \int_{\eta}^y \frac{dz}{\sqrt{y - z}} \int_0^1 t E_1(y, \eta; t) dt - \frac{1}{\sqrt{\pi(y - \eta)}},$$

$$R_4(y, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^y \left\{ \frac{1}{(z - \eta)^{3/2} \sqrt{y - z}} \exp \left[-\frac{1}{4(z - \eta)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{y - z}} \left[\frac{\partial E_{14}(z, \eta)}{\partial z} - \int_0^1 t E_{6z}(z, \eta; t) dt \right] \right\} dz - \frac{1}{\sqrt{\pi(y - \eta)}},$$

$$g_6(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi_4'(z) - \varphi_2'(z) + \varphi_1'(z)}{\sqrt{y - z}} dz + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} t \exp \left(-\frac{t^2}{4} \right) dt \times$$

$$\times \int_0^{yt^2} B_4(y, t; z) dz + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{+\infty} t \exp \left(-\frac{t^2}{4} \right) dt \int_{yt^2-1}^{yt^2} B_4(y, t; z) dz -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{2}{\sqrt{y}}} t \exp \left(-\frac{t^2}{4} \right) dt \int_0^{yt^2-1} B_5(y, t; z) dz -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{2}{\sqrt{y}}}^{+\infty} t \exp \left(-\frac{t^2}{4} \right) dt \int_{yt^2-4}^{yt^2-1} B_5(y, t; z) dz - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \tau''(\xi) d\xi \times$$

$$\times \int_0^y \frac{1}{\sqrt{z(y-z)}} \left\{ \exp \left[-\frac{(1+\xi)^2}{4z} \right] - \exp \left[-\frac{(2-\xi)^2}{4z} \right] \right\} dz -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \tau''(\xi) d\xi \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{y-z}} \int_0^1 t \left[\frac{\partial E_{10}(z, \xi; t)}{\partial z} - \frac{\partial E_{11}(z, \xi; t)}{\partial z} \right] dt.$$

Система (4.3), (4.4) однозначно разрешима в классе непрерывных функций. Решая ее, определяем функции $f_1(y)$, $f_2(y)$ и тем самым функцию $u_1(x, y)$. Функция $u_2(x, y)$ находится по формуле (2.28).

Замечание 4.1. Задача $D_{a_1 b_1}^{a_2 b_2}$ разрешима и в случае с разрывными условиями склеивания на линии изменения типа.

Замечание 4.2. Задача $D_{a_1 b_1}^{a_2 b_2}$ может быть исследована для уравнения (1.1), когда операторы L_1 и L_2 имеют вид

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} + a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + c_1(x, y),$$

$$L_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_2(x, y).$$

В связи с поставленной задачей $D_{a_1 b_1}^{a_2 b_2}$ отметим, что некоторые краевые задачи для уравнений четвертого порядка смешанно-составного типа с эллиптико-гиперболическими операторами в характеристическом квадрате изучены в работах [16, 17, 66, 67, 103, 104].

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдрахманов М. А. Об одной задаче сопряжения уравнений параболического и гиперболического типов.— Известия АН КазССР, 1967, № 5, с. 87—93.
2. Акилов Ж. А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. Ташкент: Фан, 1982, 104 с.
3. Базаров Д. Некоторые краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1978, 15 с.
4. Байменов Б. Новые постановки корректных краевых задач для уравнений смешанно-составного типа. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1983, 17 с.
5. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961, 232 с.
6. Бжихатлов Х. Г. Об одной краевой задаче для смешанных параболических уравнений с характеристической линией изменения типа.— Дифференциальные уравнения, 1977, т. XIII, № 1, с. 10—16.
7. Бжихатлов Х. Г., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболического-гиперболического типа.— ДАН СССР, 1968, т. 183, № 2, с. 261—264.

8. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. Итоги науки (2). Физ.-мат. науки. М., 1959, 164 с.
9. Бицадзе А. В. Об уравнениях смешанно-составного типа.— В сб. Некоторые проблемы математики и механики (к 60-летию акад. М. А. Лаврентьева). Новосибирск: СО АН СССР, 1961, с. 47—49.
10. Бицадзе А. В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми.— СМЖ, 1962, т. III, с. 642—644.
11. Бицадзе А. В. Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях.— ДАН СССР, 1962, т. 143, с. 1017—1019.
12. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976, 296 с.
13. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981, 448 с.
14. Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. К теории уравнений смешанно-составного типа.— СМЖ, 1961, т. II, № 1, с. 7—19.
15. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач.— ДАН СССР, 1969, т. 185, № 4, с. 739—740.
16. Бобылева Л. А. Краевая задача для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка.— Дифференциальные уравнения. Труды пединститутов РСФСР, 1973, вып. 2, с. 25—31.
17. Бобылева Л. А., Смиринов М. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка.— Известия ВУЗов, Математика, 1972, № 5 (120), с. 15—21.
18. Бориско Н. А. Единственность решения задачи Т для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.— Волжский Мат. сборник. Вып. II, Куйбышев, 1970, с. 3—8.
19. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972, 688 с.
20. Векуа И. Н. Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения.— Сообщ. АН ГССР, 1945, т. VI, № 3, с. 180—183.
21. Врагов В. Н. О задаче Коши для некоторых параболо-гиперболических уравнений.— ДАН СССР, 1973, т. 212, № 3, с. 536—539.
22. Врагов В. Н. Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений второго порядка.— Дифференциальные уравнения, 1976, т. 12, № 1, с. 24—31.
23. Гайдук С. И. Применение метода контурного интеграла к решению одной задачи на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типов.— Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 10, с. 1366—1382.
24. Гайдук С. И., Иванов А. В. Об одной задаче на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типов.— ДАН БССР, 1964, т. 8, № 9, с. 560—563.
25. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений.— УМН, т. XIV, вып. 3 (87), 1959, с. 3—19.
26. Джураев А. Системы уравнений составного типа. М.: Наука, 1972, 228 с.
27. Джураев Т. Д. Об уравнениях смешанно-составного типа.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1961, № 6, с. 3—14.
28. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979, 240 с.
29. Джураев Т. Д., Иргашев Ш. А. О некоторых краевых задачах с разрывными условиями склеивания для уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа.— В кн.: Дифференциальные уравнения и их приложения. Ташкент: Фан, 1979, с. 25—37.
30. Джураев Т. Д., Мамажанов М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка смешанно-составного типа, содержащего параболо-гиперболический оператор с младшими членами.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1982, № 2, с. 6—12.

31. Джураев Т. Д., Мамажанов М. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка смешанно-составного типа, содержащих параболо-гиперболический оператор с младшими членами.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1982, № 5, с. 12—15.
32. Джураев Т. Д., Мамажанов М. О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа.— Дифференциальные уравнения, 1983, т. 19, № 1, с. 37—50.
33. Джураев Т. Д., Рахманов У. О корректных краевых задачах для уравнений смешанно-составного типа.— Дифференциальные уравнения, 1973, т. IX, № 1, с. 32—40.
34. Джураев Т. Д., Рахманов У. Об одной краевой задаче для уравнений смешанно-составного типа.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1974, № 6, с. 8—14.
35. Джураев Т. Д., Сопуев А. Об одной пространственной задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.— Дифференциальные уравнения, 1981, т. XVII, № 1, с. 50—57.
36. Джураев Т. Д., Сопуев А. О краевых задачах для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1981, № 4, с. 22—26.
37. Джураев Т. Д., Сопуев А. О краевых задачах для уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа.— В кн.: Краевые задачи механики сплошных сред. Ташкент: Фан, 1982, с. 72—86.
38. Джураев Т. Д., Сопуев А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа.— В кн.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения. Ташкент: Фан, 1984, с. 38—45.
39. Джураев Т. Д., Шарифбаев Я. С. О некоторых краевых задачах для уравнений с частными производными третьего порядка. —В кн.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений, 2. Ташкент: Фан, 1972, с. 80—96.
40. Джураев Т. Д., Эгамбердиев У. О некоторых краевых задачах для смешанного гипербола-параболического уравнения.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1984, № 2, с. 15—20.
41. Ежов А. М. О решении пространственной задачи для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями вырождения.— Дифференциальные уравнения. Труды пединститутов РСФСР, 1973, вып. 2, с. 84—102.
42. Ежов А. М., Пулькин С. П. Оценка решения задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа.— ДАН СССР, 1970, т. 193, № 5, с. 978—980.
43. Елеев В. А. Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа.— Дифференциальные уравнения, 1977, т. XIII, № 1, с. 56—63.
44. Елеев В. А. О некоторых краевых задачах для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.— Дифференциальные уравнения, 1978, т. XIV, № 1, с. 22—29.
45. Елеев В. А. Обобщенная задача Трикоми для смешанных гипербола-параболических уравнений.— Дифференциальные уравнения, 1979, т. XV, № 1, с. 41—53.
46. Елеев В. А. Обобщенная задача Трикоми для смешанных гипербола-параболических уравнений с характеристической линией изменения типа.— Дифференциальные уравнения, 1980, т. XVI, № 1, с. 59—73.
47. Золина Л. А. О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа.— ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 6, с. 991—1001.
48. Золина Л. А. О краевых задачах для модельных уравнений эллиптического-параболического и гипербола-параболического типов. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1967, 12 с.

49. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950, 229 с.
50. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.— Дифференциальные уравнения, 1977, т. XII, № 2, с. 294—304.
51. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа.— УМН, 1962, т. 17, вып. 3, с. 3—141.
52. Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями.— ЖВМиМФ, 1964, т. 4, № 6, с. 1006—1024.
53. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа.— Вестник ЛГУ, серия мат., мех. и астр., 1965, т. 19, № 4, с. 38—46.
54. Ланин И. Н. Краевая задача для одного нагруженного гипербола-параболического уравнения третьего порядка.— Дифференциальные уравнения, 1981, т. 17, № 1, с. 97—106.
55. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Некоторые вопросы теории уравнения Штурма—Лиувилля.— УМН, 1960, т. XV, вып. 1 (91), с. 3—98.
56. Лозановская И. Т., Уфлянд Я. С. Об одном классе задач математической физики со смешанным спектром собственных значений.— ДАН СССР, 1965, т. 164, № 5, с. 1005—1007.
57. Мамажанов М. Об одном способе решения уравнений смешанно-составного типа.— В кн.: Краевые задачи механики сплошных сред. Ташкент: Фан, 1982, с. 100—116.
58. Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений третьего порядка парабола-гиперболического типа. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1983, 15 с.
59. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959, 224 с.
60. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 512 с.
61. Нагорный А. М. Краевые задачи для вырождающегося уравнения гипербола-параболического типа.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1981, № 2, с. 32—36.
62. Напсо А. Ф. Нелокальные краевые задачи для параболических и смешанных гипербола-параболических уравнений второго порядка. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1982, 10 с.
63. Нахушев А. М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта.— Дифференциальные уравнения, 1968, т. IV, № 1, с. 52—62.
64. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа.— Дифференциальные уравнения, 1969, т. V, № 1, с. 44—59.
65. Нахушев А. М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гипербола-параболического типа.— Дифференциальные уравнения, 1978, с. XIV, № 1, с. 66—73.
66. Невоструев Л. М., Реннер А. Г. Аналог некоторых краевых задач для уравнений смешанно-составного типа 4-го порядка с младшими членами.— Дифференциальные уравнения. Труды пединститутов РСФСР, 1976, вып. 8, с. 125—130.
67. Пастухов Д. И. О задаче со смещением для одного уравнения 4-го порядка смешанно-составного типа.— В кн.: Дифференциальные уравнения и математическая физика, т. 232, вып. 1, Куйбышев, 1979, с. 70—77.
68. Петров В. Г. Една гранична задача за уравнение от смесено-съставен тип. Годишник на ВУЗ, приложна математика. София, 1976, т. VII, кн. 2, с. 49—56.
69. Петров В. Г. Върху едно уравнение от смесено-съставен тип. Годишник на ВУЗ, приложна математика. София (1978), 1979, т. XIV, кн. 3, с. 91—102.

70. Пономарев С. М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях.— ДАН СССР, 1979, т. 246, № 6, с. 1303—1306.
71. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983, 750 с.
72. Пулькин С. П. Задача Трикоми для общего уравнения Лаврентьева—Бицадзе.— ДАН СССР, 1958, т. 118, № 1, с. 38—41.
73. Пулькин С. П. Интегральное представление решения задачи Коши—Гурса.— Ученые записки Куйбышевского ГПИ, физ.-мат. науки. Вып. 29, 1959, с. 25—40.
74. Рахманов У. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного (эллиптико-параболического) и смешанно-составного типов. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1973, 19 с.
75. Рустамов А. С. Исследование смешанной задачи для одного уравнения составного типа.— Известия АН АзербССР, серия физико-техн. и матем. наук, 1971, № 5, с. 18—24.
76. Рустамов А. С. Смешанная задача для уравнения составного типа с переменными коэффициентами.— Дифференциальные уравнения, 1982, т. 18, № 10, с. 1794—1804.
77. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974, 156 с.
78. Салахитдинов М. С., Бердышев А. С. О некоторых нелокальных краевых задачах для смешанного парабола-гиперболического уравнения.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1982, № 4, с. 25—31.
79. Салахитдинов М. С., Бердышев А. С. Задача Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1983, № 4, с. 20—25.
80. Салахитдинов М. С., Джураев Т. Д. Об одной смешанной задаче для уравнений третьего порядка парабола-гиперболического типа.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1971, № 4, с. 26—31.
81. Салахитдинов М. С., Нагорный А. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа.— В кн.: Краевые задачи для уравнений математической физики. Ташкент: Фан, 1980, с. 3—13.
82. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. О некоторых краевых задачах со смешением для уравнения смешанного типа.— В кн.: Дифференциальные уравнения и вопросы теории ветвления. Ташкент: Фан, 1982, с. 3—12.
83. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения.— ДАН СССР, 1982, т. 262, № 3, с. 539—541.
84. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного парабола-гиперболического уравнения.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1984, № 3, с. 29—34.
85. Салихов Ш. Н. Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего и высокого порядков с действительными характеристиками. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1984, 17 с.
86. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966, 444 с.
87. Сопуев А. О краевых задачах А. В. Бицадзе для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа.— Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1982, № 2, с. 23—27.
88. Сопуев А. Оценка решения одной задачи Геллерстедта для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа.— ДАН УзССР, 1982, № 7, с. 3—4.
89. Сопуев А. Об аналогах задач Геллерстедта для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа.— В кн.: Краевые задачи механики сплошных сред. Ташкент: Фан, 1982, с. 87—99.

90. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, содержащих парабола-гиперболический оператор. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1982, 18 с.
91. Сопуев А. Об одном трехмерном аналоге задачи Коши для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа. В кн. Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения. Ташкент: Фан, 1984, с. 45—55.
92. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970, 201 с.
93. Стручин Г. М. Задача о сопряжении двух уравнений. Инженерно-физический журнал, 1961, т. IV, № 11, с. 99—104.
94. Стулялис Л. Начально-краевые задачи для уравнений смешанного типа. — Труды МИАН СССР, т. XXVII. Л.: Наука (ЛГО), 1970, с. 145—145.
95. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977, 736 с.
96. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л.: Гостехиздат, 1947, 190 с.
97. Уринов А. К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа с негладкими линиями вырождения. Канд. дисс. Ташкент, 1983, 123 с.
98. Уфлянд Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях. — Инженерно-физический журнал, 1964, т. VII, № 1, с. 89—92.
99. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968, 428 с.
100. Шарифбаев Я. С. О некоторых краевых задачах для уравнений с частными производными третьего порядка составного и гипербола-параболического типов. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1975, 19 с.
101. Эгамбердиев У. Краевые задачи для смешанного парабола-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1984, 17 с.
102. Эскен Г. И. Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными. — Труды Московского матем. общества, 1970, т. 21, с. 245—292.
103. Этлин И. Е. Краевая задача со смещением для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка. — Дифференциальные уравнения. Труды пединститутов РСФСР, 1975, вып. 6, с. 229—236.
104. Этлин И. Е. Об одном уравнении смешанно-составного типа 4-го порядка. — Дифференциальные уравнения. Труды пединститутов РСФСР, 1975, вып. 6, с. 237—244.
105. Якубов С., Эгамбердиев У. О некоторых краевых задачах с неизвестной границей для смешанных парабола-гиперболических уравнений второго и третьего порядков. — Дифференциальные уравнения, 1984, т. XX, № 1, с. 154—161.
106. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. H. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type. *Communs Pure and Appl. Math.* 1953, v. 1, 4, p. 455—470.
107. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, 21, N 2, p. 155—160.
108. Nanin M. Propagation of an aperiodic wave in a compressible viscous medium. *Journal of Math. and Phys.*, 1957, vol. 36.
109. Nardini R. Soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. *Annali di Mat. pur. appl.*, 1953, vol. 35, N 4.
110. Nardini R. Sul compartimento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. *Rend. Acc. Naz. Lincei*, 1954, vol. 16, N 8.
111. Pini B. Un problema di valori al contorno per un'equazione a derivate parziali del tezo ordine con parte principale di tipo composito. *Dend. Sem. Fas. Sci. Univ. Cagliari*, 1957, N 27, p. 114—135.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа на плоскости	9
§ 1. Задача Трикоми	9
§ 2. Задача Геллерстедта	18
§ 3. Задача Бицадзе	25
§ 4. Задача Коши для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа	30
§ 5. Смешанные задачи для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа	35
§ 6. Нелокальная задача типа задачи Бицадзе-Самарского для параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа	42
Глава 2. Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в пространстве	48
§ 1. Трехмерный аналог задачи Трикоми	48
§ 2. Задача T для параболо-гиперболического уравнения, вырождающегося в гиперболической части области	56
§ 3. Трехмерный аналог задачи Геллерстедта	60
Глава 3. Новые постановки корректных краевых задач для уравнений смешанно-составного типа	69
§ 1. Краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа с эллиптико-гиперболическим оператором	70
§ 2. Новые постановки краевых задач для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка	83
§ 3. Краевые задачи со смещением для одного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка	98
§ 4. Задача Геллерстедта для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка	107
§ 5. Задача Бицадзе для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка	118
Глава 4. Краевые задачи для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа	125
§ 1. Задача D_{abc}	126
§ 2. Задача D_{abc} с разрывными условиями склеивания	141
§ 3. Видоизмененная задача D_{abc}	148
§ 4. Краевые задачи для уравнений третьего порядка, содержащих параболо-гиперболический оператор с младшими членами	160
Глава 5. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка параболо-гиперболического типа	170
§ 1. Постановка задачи	170
§ 2. Исследование случаев, когда характеристики операторов S_1 и S_2 не параллельны осям координат	174
§ 3. Исследование случаев, когда характеристика оператора S_1 параллельна оси y	200
§ 4. Исследование случаев, когда характеристика оператора S_1 параллельна оси x	203
Литература	215