

Т. Д. ДЖУРАЕВ, А. СОПУЕВ

К ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ
ЧЕТВЕРТОГО
ПОРЯДКА

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. В. И. РОМАНОВСКОГО
ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т. Д. ДЖУРАЕВ, А. СОПУЕВ

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ТАШКЕНТ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ФАН» АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
2000

УДК 517.956

Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. - Ташкент: Фан, 2000. - 144 с.

В монографии рассмотрены вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, построения функции Римана для гиперболических уравнений четвертого порядка, изучения экстремальных и экспоненциальных свойств функций Римана, корректной постановки ряда краевых задач для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа четвертого порядка.

Для широкого круга специалистов, научных работников и преподавателей вузов, аспирантов и студентов физико-математических факультетов университетов и вузов с повышенной математической подготовкой, специализирующихся по теории и приложениям уравнений в частных производных и уравнений смешанного типов.

Библиогр.: 155 назв.

Ответственный редактор: доктор физико-математических наук,
С. Абдиназаров

Рецензент: доктор физико-математических наук Ж.О. Тохиров

К $\frac{1602070100-3-432}{М 355(04)00}$ Рез. 2000

© Издательство «ФАН» АН РУз

2000 г.

ISBN 5-648-02687-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА I. Классификация и приведение к каноническому виду линейных уравнений в частных производных четвертого порядка	10
§ 1.1. Классификация уравнений четвертого порядка с двумя независимыми переменными	10
§ 1.2. Доказательство лемм 1.1, 1.2 и 1.3	17
§ 1.3. Приведение к каноническому виду уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами	32
§ 1.4. Приведение к каноническому виду уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами	40
§ 1.5. Канонические формы линейных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами	50
ГЛАВА II. Функция Римана для линейных гиперболических уравнений четвертого порядка и ее свойства	55
§ 2.1. Функция Римана и представление общего решения гиперболического уравнения четвертого порядка в прямоугольных областях	55
§ 2.2. Свойства функции Римана	63
§ 2.3. Функция Римана для гиперболического уравнения четвертого порядка с тремя кратными характеристиками	74
§ 2.4. Задача Дирихле для гиперболического уравнения четвертого порядка... ..	80
ГЛАВА III. Краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка	87
§ 3.1. Основные краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка	87
§ 3.2. Аналог задачи Дарбу для гиперболических уравнений четвертого порядка	91
§ 3.3. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами	95
ГЛАВА IV. Краевые задачи для уравнений смешанного типа четвертого порядка	99
§ 4.1. Краевые задачи для смешанно – гиперболических уравнений четвертого порядка с линией сопряжения $y=0$	99
§ 4.2. Краевые задачи смешанно-гиперболических уравнений четвертого порядка с линией сопряжения $x=0$	106
§ 4.3. Краевые для смешанного парабола-гиперболического уравнения четвертого порядка.....	111
§ 4.4. Краевые задачи для смешанного парабола-гиперболического уравнения четвертого порядка с двумя линиями изменения типа.....	129
ЛИТЕРАТУРА	134

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению нестандартных начально-краевых, прямых и обратных задач для уравнений в частных производных, не имеющих аналогов в классической математической физике.

Возникшие в приложениях проблемы, в частности проблемы околозвуковой и сверхзвуковой газовой динамики [12, 141-143], без моментной теории оболочек и другие [64] привели к систематическому изучению уравнений смешанного типа, которая в разных частях рассматриваемой области принадлежит к различным типам, а на линии раздела выполняются условия сопряжения.

Первые фундаментальные исследования уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа были выполнены Ф. Трикоми [135] и С. Геллерстедтом [150]. Основополагающие математические результаты в этом направлении получены в работах М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, Ф.И. Франкля (см. напр. [7, 14, 16, 67, 143]. Оригинальные результаты по теории уравнений смешанного типа получены в работах С.А. Алдашева [4], В.Ф.Волкодавова [22], В.Н. Врагова [23], Д.К. Гвазава [28], Т.Д. Джураева [32], В.И. Жегалова [53], Т.Ш. Кальменова [58], Е.И. Моисеева [75], М.М. Мередова [72-74], А.М. Нахушева [78-80], С.П. Пулькина [85], М.С. Салахитдинова [89], М.М. Смирнова [98] и многих других.

Если первоначально изучались преимущественно уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа, то в настоящее время понятие уравнений смешанного типа значительно расширилось и включает всевозможные комбинации двух или трех классических типов уравнений. Интенсивное исследование уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов обусловлено тем, что, с одной стороны, новые типы смешанных уравнений еще мало исследовано в теоретиче-

ском плане, а с другой, они находят широкое применение в важных вопросах механики, физики и техники.

Например, задача о движении газа в канале, окруженном пористой средой [29], задачи тепло и массопереноса [70], задача о распространении электрических колебаний [139], задача о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле [132], совместно-раздельные течения вязкоупругой и вязкой жидкостей [3] и другие процессы, происходящие в двухслойных средах с резко отличающимися физическими свойствами приводят к рассмотрению задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, а на другой - гиперболическое. Задача Трикоми и её обобщения, задачи со смещениями, задачи типа задачи Бицадзе-Самарского и другие нелокальные задачи для смешанных парабола-гиперболических уравнений второго порядка исследованы в работах [2, 5, 10, 11, 13, 38, 40-43, 50, 54, 56, 69, 90, 96, 105-114, 124, 130, 133, 134].

Одним из важных классов уравнений с частными производными являются уравнения составного и смешанно-составного типов. Корректные краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа впервые исследованы А.В. Бицадзе и М.С. Салахитдиновым [17], Т.Д. Джураевым [31-32]. Обзор работ, посвященных изучению уравнений составного и смешанно-составного типов имеется в монографиях М.С. Салахитдинова [89], Т.Д. Джураева [32]. Системы уравнений составного типа рассмотрены в работе А. Джураева [30].

Систематическое изучение уравнений третьего порядка, содержащих в главной части смешанные операторы парабола-гиперболического и эллипτικο-параболического типов, началось в семидесятые годы и интенсивно развивается в работах Т.Д. Джураева и его учеников. Необходимо отметить, что некоторые прикладные задачи приводят к рассмотрению уравнений третьего порядка с частными производными. В частности, вопросы фильтрации жидкости в пористых средах, передачи тепла в гетерогенной

среде, влагопереноса в почвогрунтах приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются уравнениями в частных производных гиперболического типа третьего порядка. Изучение краевых задач для уравнений третьего и высокого порядков привлекали внимание многих исследователей [1, 6, 9, 21, 33, 36, 39, 44, 49, 61, 86, 91, 97, 104, 119, 120-122, 128, 145, 146, 151-154].

Т.Д. Джураев и Я. Попёлек [34] исследовали вопросы полной классификации и приведения к каноническому виду уравнения

$$Au_{xxx} + Bu_{xxy} + Cu_{xyy} + Du_{yyy} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}), \quad (1)$$

где A, B, C, D являются функциями x и y . В частности доказана следующая

Теорема: Если в окрестности некоторой точки P

- a) $\Delta = 0$ и $B^2 = 3AC$; b) $\Delta = 0$ и $B^2 \neq 3AC$;
- c) $\Delta > 0$; d) $\Delta < 0$,

то уравнение в некоторой окрестности этой точки может быть приведено соответственно к следующему каноническому виду:

$$1) \ u_{xxx} = \Phi; \qquad 2) \ u_{xxy} = \Phi;$$

$$3) \ \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_{yy}) = \Phi \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) u_{xy} = \Phi;$$

$$4) \ \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} + u_{yy}) = \Phi;$$

где $\Delta = \frac{1}{3} [4(B^2 - 3AC)(C^2 - 3BD) - (BC - 9AD)^2]$ - дискриминант характеристического уравнения, а $\Phi = \Phi(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$.

В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, с использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики различных неоднородных, и в частности стратифицированных жидкостей, которые приводят к начально-краевым задачам для уравнений с частными

производными четвертого порядка [19, 25, 26, 51, 137, 144]. Типичными примерами таких уравнений являются уравнения вида:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{xx} - \beta^2 u) + \omega_o^2 u_{xx} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} - \beta^2 u \right) - \omega_o^2 u_{xx} = 0, \quad (3)$$

где β - положительное число, характеризующее явление стратификации, ω_o - частотный параметр Вейселя-Брента, а c - скорость звука. Уравнение (2) называется уравнением динамики одномерных течений [24], а уравнение (3) - уравнением динамики сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости [27]. Исследованию начально-краевых задач для уравнений динамики стратифицированных жидкостей посвящена серия работ [24-26, 56, 82, 83].

При изучении распространения волн в диспергирующих средах [19] возникает уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m c_o^2 \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - m c_o^2 \tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}, \quad (4)$$

где u - плотность, c_o - скорость звука, τ - время релаксации.

Первый диссипативный член в правой части уравнения (4) описывает слабые дисперсионные эффекты. Частным случаем уравнения (4) является уравнение Буссинеска-Лява

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0,$$

которое описывает продольные волны в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции.

Поперечные колебания стержня и балок сводятся к изучению уравнений четвертого порядка вида [87, 131, 132, 140]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Из рассмотренных и многих других примеров вытекает важность исследования краевых задач для уравнений с частными производными четвертого и более высокого порядков. На важность подобных исследований в теории уравнений смешанного типа указывал А.В. Бицадзе [14]. В качестве модельного уравнения им было предложено уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \operatorname{sgn} y \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

М.М. Смирнов [98], М.М. Мередов [72-74], В.И. Жегалов [53] и другие рассмотрели ряд задач для этого и других уравнений четвертого порядка.

Таким образом, многочисленные приложения уравнений четвертого порядка с частными производными приводят к необходимости рассмотрения вопросов классификации и приведения к каноническому виду уравнений четвертого порядка:

$$\begin{aligned} & Au_{xxxx} + Bu_{xxxu} + Cu_{xxuu} + Du_{xuuu} + Eu_{uuuu} = \\ & = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}, u_{yyy}), \end{aligned} \quad (5)$$

где A, B, C, D, E являются функциями x и y .

Известно, что определение типа уравнения или системы по их коэффициентам является чрезвычайно важной задачей теории дифференциальных уравнений, так как определение типа уравнения позволяет ставить корректные краевые задачи, выбирать метод исследования и судить о характерных особенностях решения дифференциального уравнения в заданной области.

Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными общеизвестна, но с ростом порядка уравнения или увеличения числа независимых переменных вопросы классификации и приведения к каноническому виду

усложняются [20, 63, 132]. Вопросы классификации и приведения к каноническому виду уравнений третьего порядка, как уже было указано выше, рассмотрена в [34]. Способы построения эффективных критериев для нахождения типов систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными по их коэффициентам исследованы в [102]. Однако эти вопросы для уравнений с частными производными четвертого порядка вида (5) оставались не изученными, хотя исследованию начально-краевых задач для различных видов таких уравнений и их приложениям посвящена обширная литература [24-27, 72-74, 83, 97, 98, 131].

Для того, чтобы изучить какую-нибудь граничную задачу для уравнения (5), мы не можем использовать теорию потенциала, метод функции Грина или Римана до тех пор, пока не будет известен тип уравнения. Можно привести ряд примеров, когда только определение типа уравнения позволяет получить серьезные результаты.

Эффективное определение типа уравнения и приведения его к каноническому виду дает возможность сформулировать правильную постановку краевых задач и исследовать не только прямые, но и обратные задачи для уравнений с частными производными.

В монографии рассмотрены вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка, постановке и исследованию корректных краевых задач для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа четвертого порядка, построению функции Римана и изучению ее экстремальных и экспоненциальных свойств. В книгу вошли результаты авторов и их учеников, часть из них излагаются впервые.

В заключении отметим, что библиография не претендует на полноту и касается главным образом вопросов, близких к темам, рассматриваемым в настоящей книге.

ГЛАВА I. КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В этой главе рассматриваются вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных уравнений с частными производными четвертого порядка с двумя независимыми переменными.

§ 1.1. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим в некоторой области Ω плоскости дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка с двумя независимыми переменными, линейное относительно старших производных

$$\begin{aligned} Au_{xxxx} + Bu_{xxxu} + Cu_{xxuu} + Du_{xuuu} + Eu_{uuuu} = \\ = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xxu}, u_{xuu}, u_{yuu}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где A, B, C, D, E - заданные функции из класса $C^4(\Omega)$.

С помощью преобразования переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, допускающего обратное преобразование, получаем новое уравнение, эквивалентное исходному:

$$\begin{aligned} A_1 u_{\xi\xi\xi\xi} + B_1 u_{\xi\xi\xi\eta} + C_1 u_{\xi\xi\eta\eta} + D_1 u_{\xi\eta\eta\eta} + E_1 u_{\eta\eta\eta\eta} = \\ = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}, u_{\xi\xi\xi}, u_{\xi\xi\eta}, u_{\xi\eta\eta}, u_{\eta\eta\eta}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_I &= A\xi_x^4 + B\xi_x^3\xi_y + C\xi_x^2\xi_y^2 + D\xi_x\xi_y^3 + E\xi_y^4, \\
 B_I &= 4A\xi_x^3\eta_x + B(\xi_x^3\eta_y + 3\xi_x^2\xi_y\eta_x) + 2C(\xi_x^2\xi_y\eta_x + \xi_x\xi_y^2\eta_x) + \\
 &\quad + D(3\xi_x\xi_y^2\eta_y + \xi_y^3\eta_x) + 4E\xi_y^3\eta_y, \\
 C_I &= 6A\xi_x^2\eta_x^2 + 3B(\xi_x^2\eta_x\eta_y + \xi_x\xi_y\eta_y^2) + C(\xi_x^2\eta_y^2 + \\
 &\quad + 4\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + \xi_y^2\eta_x^2) + 3D(\xi_x\xi_y\eta_y^2 + \xi_y^2\eta_x\eta_y) + 6E\xi_y^2\eta_y^2, \\
 D_I &= 4A\xi_x\eta_x^3 + B(3\xi_x\eta_x^2\eta_y + \xi_y\eta_y^3) + 2C(\xi_x\eta_x\eta_y^2 + \xi_y\eta_x^2\eta_y) + \\
 &\quad + D(\xi_x\eta_y^3 + 3\xi_y\eta_x\eta_y^2) + 4E\xi_y\eta_y^3, \\
 E_I &= A\eta_x^4 + B\eta_x^3\eta_y + C\eta_x^2\eta_y^2 + D\eta_x\eta_y^3 + E\eta_y^4.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Выберем новые переменные ξ и η так, чтобы уравнение (1.2) в некоторой точке P области Ω имело канонический вид.

В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что $A > 0$. Если $A < 0$, то умножая уравнение (1.1) на -1 , придем к предыдущему случаю. Если в уравнении (1.1) $A \equiv 0$, но $E \neq 0$, то перестановка независимых переменных приводит к желаемому случаю. А если одновременно $A \equiv 0$ и $E \equiv 0$, то простая замена $\xi = x + y$, $\eta = -x + y$ приводит уравнение (1.1) к виду (1.2), где $A_I = C + B + D$, $E_I = C - B - D$. Отсюда видно, что A_I и E_I одновременно могут быть равны нулю только при $C = 0$, $B = -D$. Но в этом случае уравнение уже имеет канонический вид (см. формулу (1.3) при $A = 0$).

Имеет место

Л е м м а 1.1. *Функция $z = \varphi(x, y)$ является решением уравнения*

$$Az_x^4 + Bz_x^3z_y + Cz_x^2z_y^2 + Dz_xz_y^3 + Ez_y^4 = 0 \tag{1.4}$$

тогда и только тогда, когда соотношение $\varphi(x, y) = \text{const}$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$A(dy)^4 - B(dy)^3 dx + C(dy)^2 (dx)^2 - Ddy(dx)^3 + E(dx)^4 = 0. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) называется уравнением характеристик для уравнения (1.1), а его интегралы - характеристиками.

Рассмотрим алгебраическое уравнение, т.е. характеристическое уравнение уравнения (1.5)

$$A\lambda^4 - B\lambda^3 + C\lambda^2 - D\lambda + E = 0. \quad (1.6)$$

После подстановки

$$\lambda = \frac{\mu}{\sqrt{A}} + \frac{B}{4A} \quad (1.7)$$

получим

$$\mu^4 + p\mu^2 + q\mu + r = 0, \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \frac{8AC - 3B^2}{8A}, \quad q = \frac{4ABC - 8A^2D - B^3}{8A\sqrt{A}}, \\ r &= \frac{256A^3E + 16AB^2C - 64A^2BD - 3B^4}{256A^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Дискриминант уравнения (1.8) может быть приведен к виду

$$\Delta = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3. \quad (1.10)$$

Нетрудно заметить, что Δ можно представить в виде

$$\Delta = \frac{1}{27} [4(p^2 + 12r)^3 - (71pr - 27q^2 - 2p^3)^2]. \quad (1.11)$$

Подставляя в (1.11) значения p, q и r , определенные формулами (1.9), имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{27} [4(C^2 - 3BD + 12AE)^3 - (72ACE + 9BCD - 27AD^2 - \\ &\quad - 27B^2E - 2C^3)^2]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Выражение (1.12) будем называть дискриминантом уравнения (1.6).

Пусть

$$\Delta_I = \frac{1}{27} [4(C_I^2 - 3B_ID_I + 12A_IE_I)^3 - (72A_IC_IE_I + 9B_IC_ID_I - 27A_ID_I^2 - 27B_I^2E_I - 2C_I^3)^2] \quad (1.13)$$

- дискриминант характеристического уравнения

$$A_I\lambda^4 - B_I\lambda^3 + C_I\lambda^2 - D_I\lambda + E_I = 0,$$

соответствующее уравнению (1.2).

Л е м м а 1.2. Имеет место тождество

$$\Delta_I = J^{12} \Delta, \quad (1.14)$$

где $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ - якобиан преобразования переменных.

Заметим, что из тождества (1.14) следует инвариантность знака дискриминанта Δ при преобразовании переменных, так как якобиан J преобразования переменных отличен от нуля.

Заметим также, что классификация уравнения (1.1) тесно связана с классификацией корня уравнения (1.6) или (1.8).

Л е м м а 1.3. Для того, чтобы уравнение (1.8) имело

- 1) а) *один четырехкратный действительный корень;*
б) *один трехкратный и один простой действительных корня;*
в) *два различных двукратных действительных корня;*
г) *два различных двукратных комплексно-сопряженных корня;*
д) *один двукратный и два различных действительных корня;*
е) *один двукратный действительный и два комплексно-сопряженных корня;*
- 2) *четыре различных действительных корня;*
- 3) *четыре различных комплексно-сопряженных корня;*
- 4) *два различных действительных и два комплексно-сопряженных корня, необходимо и достаточно выполнения следующих условий соответственно:*

$$\Delta = 0, \quad p = 0, \quad r = 0, \quad (1.15)$$

$$\Delta = 0, \quad p < 0, \quad p^2 + 12r = 0, \quad (1.16)$$

$$\Delta = 0, \quad p < 0, \quad q = 0, \quad r > 0, \quad (1.17)$$

$$\Delta = 0, \quad p > 0, \quad q = 0, \quad r > 0, \quad (1.18)$$

$$\Delta = 0, \quad p < 0, \quad -p^2 < 12r < 3p^2, \quad (1.19)$$

$$\Delta = 0, \quad p > -2\sqrt{r}, \quad r \geq 0, \quad (1.20)$$

$$\Delta > 0, \quad p < 0, \quad -p^2 < 12r < 3p^2, \quad (1.21)$$

$$\Delta > 0, \quad p > -2\sqrt{r}, \quad r > 0, \quad p \neq 2\sqrt{r}, \quad (1.22)$$

$$\Delta < 0. \quad (1.23)$$

На основании леммы 1.3 нетрудно будет привести уравнение (1.1) к каноническому виду.

Т е о р е м а 1.1. *Если в окрестности точки P выполняется одно из условий (1.15) - (1.19), то уравнение (1.1) в некоторой окрестности этой точки может быть приведено соответственно к следующему каноническому виду:*

$$1) \text{ а) } \quad u_{\xi\xi\xi\xi} = \Phi, \quad (1.24)$$

$$\text{б) } \quad u_{\xi\xi\xi\eta} = \Phi, \quad (1.25)$$

$$\text{в) } \quad u_{\xi\xi\eta\eta} = \Phi \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) (u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}) = \Phi, \quad (1.26)$$

$$\text{г) } \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = \Phi, \quad (1.27)$$

$$\text{д) } \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}) = \Phi, \quad (1.28)$$

где

$$\Phi = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}, u_{\xi\xi\xi}, u_{\xi\xi\eta}, u_{\xi\eta\eta}, u_{\eta\eta\eta}).$$

З а м е ч а н и е 1.1. В случае выполнения условий (1.18) будем считать, что коэффициенты уравнения (1.1) аналитические функции [132, с. 17].

Рассмотрим теперь уравнение (1.1) в случае, когда коэффициенты A, B, C, D и E постоянные. Тогда достаточно использовать линейные преобразования переменных $\xi = ax + by, \eta = cx + dy$ при $ad - bc \neq 0$. Ясно, что формулы (1.3) будут верны, если заменить $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ через a, b, c и d соответственно.

Т е о р е м а 1.2. Пусть коэффициенты A, B, C, D, E уравнения (1.1) постоянны и выполняется одно из условий (1.20) - (1.23). Тогда уравнение (1.1) приводится соответственно к следующему виду:

$$1) \text{ e) } \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = \Phi, \quad (1.29)$$

$$2) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - a \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) (u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}) = \Phi, \quad (1.30)$$

$$3) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = \Phi, \quad (1.31)$$

$$4) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = \Phi, \quad (1.32)$$

где a, b, c - const, причем $b > 0, b \neq 1$.

З а м е ч а н и е 1.2. В общем случае, т.е. в случае переменных коэффициентов уравнения (1.1), утверждения теоремы 1.2 имеют место при весьма жестких ограничениях на коэффициенты A, B, C, D, E .

Исходя из (1.15) - (1.23) и (1.24) - (1.32) можно дать следующую классификацию уравнения (1.1).

Уравнение (1.1) в точке P назовем уравнением:

1) параболического типа, если выполняется условие (1.15), т.е. уравнение (1.8) имеет один четырехкратный действительный корень;

2) гиперболического типа, если выполняется условие (1.16), (1.17) или (1.19), т.е. уравнение (1.8) имеет только действительные корни, причем один из них либо двукратный, либо трехкратный;

3) строго гиперболического типа, если выполняется условие (1.21), т.е. уравнение (1.8) имеет четыре различных действительных корня;

4) эллиптического типа [66], если выполняется условие (1.18) или (1.22), т.е. уравнение (1.8) имеет два различных двукратных или четыре различных комплексно-сопряженных корня;

5) составного типа [17], если выполняется условие (1.20) или (1.23), т.е. уравнение (1.8) имеет как действительные, так и комплексно-сопряженные корни.

§ 1.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 1.1, 1.2 И 1.3

В этом параграфе приведем доказательство лемм, указанных в § 1.1. Доказательство леммы 1.1 проведем, методом указанным в [132].

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $z = \varphi(x, y)$ - решение уравнения (1.4). Рассмотрим семейство $\varphi(x, y) = k$ и докажем, что любая кривая этого семейства удовлетворяет уравнению (1.5).

В любой точке, лежащей на кривой функция $\varphi(x, y) = k$ (где k – фиксировано), выполняется следующее равенство:

$$\varphi_x(x, y) dx + \varphi_y(x, y) dy = 0,$$

так как вдоль данной кривой $\varphi(x, y)$ постоянна, и поэтому её полный дифференциал равен нулю.

Следовательно, всюду на кривой имеет место равенство

$$\frac{dx}{\varphi_y} = \frac{dy}{-\varphi_x}$$

Обозначим каждое из этих отношений через χ ; тогда $dy = -\chi\varphi_x$,

$dx = \chi\varphi_y$. Подставляя эти выражения для dx и dy в левую часть уравнения (1.5), получим

$$\begin{aligned} & A(dy)^4 - B(dy)^3 dx + C(dy)^2 (dx)^2 - Ddy(dx)^3 + E(dx)^4 = \\ & = \chi^4 [A\varphi_x^4 + B\varphi_x^3\varphi_y + C\varphi_x^2\varphi_y^2 + D\varphi_x\varphi_y^3 + E\varphi_y^4] \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю, так как, по условию, функция $\varphi(x, y)$ есть решение уравнения (1.4). Следовательно, во всех точках кривой имеет место равенство

$$A(dy)^4 - B(dy)^3 dx + C(dy)^2 (dx)^2 - Ddy(dx)^3 + E(dx)^4 = 0,$$

откуда вытекает, что она является интегральной кривой уравнения (1.5).

Итак, любая кривая вида $\varphi(x, y) = k$ является интегральной кривой уравнения (1.5) в той области Ω , где задано решение; с другой стороны,

через каждую точку области Ω проходит кривая такого вида; это вытекает из того, что функция $\varphi(x, y)$ определена всюду в области Ω и поэтому, например, через точку (x_0, y_0) проходит кривая $\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0)$. Отсюда следует, что семейство $\varphi(x, y) = k$ является общим интегралом уравнения (1.5).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть семейство $\varphi(x, y) = k$ будет общим интегралом уравнения (1.5). Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) из Ω и выделим ту кривую семейства, которая проходит через эту точку: $\varphi(x, y) = k_0$. Так же, как и при доказательстве необходимости, убеждаемся, что всюду вдоль этой кривой выполняется равенство

$$\frac{dx}{\varphi_y} = \frac{dy}{-\varphi_x},$$

откуда

$$dx = \chi \varphi_y, \quad dy = -\chi \varphi_x. \quad (1.33)$$

Так как кривая является интегральной кривой уравнения (1.5), то при подстановке в это уравнение значения dx и dy из (1.33), получим тождество:

$$\chi^4 [A\varphi_x^4 + B\varphi_x^3\varphi_y + C\varphi_x^2\varphi_y^2 + D\varphi_x\varphi_y^3 + E\varphi_y^4] = 0,$$

или, после сокращения на χ^4 :

$$A\varphi_x^4 + B\varphi_x^3\varphi_y + C\varphi_x^2\varphi_y^2 + D\varphi_x\varphi_y^3 + E\varphi_y^4 = 0.$$

В частности, в точке (x_0, y_0) имеет место:

$$\begin{aligned} & A(x_0, y_0)\varphi_x^4(x_0, y_0) + B(x_0, y_0)\varphi_x^3(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + \\ & + C(x_0, y_0)\varphi_x^2(x_0, y_0)\varphi_y^2(x_0, y_0) + D(x_0, y_0)\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y^3(x_0, y_0) + \\ & + E(x_0, y_0)\varphi_y^4(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

Но последнее равенство означает, что функция двух переменных $\varphi(x, y)$ удовлетворяет в точке (x_0, y_0) уравнению (1.4). Так как точка (x_0, y_0) была взята произвольно в области Ω , то функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравне-

нию (1.4) во всех точках этой области, т.е., эта функция является одним из решений уравнения (1.4).

Таким образом, лемма 1.1 доказана.

Доказательство леммы 1.2. Учитывая соотношения (1.3) нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} C_1^2 - 3B_1D_1 + 12A_1E_1 &= J^4(C^2 - 3BD + 12AE), \\ 72A_1C_1E_1 + 9B_1C_1D_1 - 27A_1D_1^2 - 27B_1^2E_1 - 2C_1^3 &= \\ &= J^6(72ACE + 9BCD - 27AD^2 - 27B^2E - 2C^3) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Тогда из (1.13), с учетом (1.34), непосредственно вытекает (1.14).

Лемма 1.2 доказана.

Доказательство леммы 1.3. Доказательство каждого из случаев рассмотрим в отдельности.

1а). Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\mu = \alpha$ - четырехкратный действительный корень уравнения (1.8). Тогда из формулы Виета имеем, что

$$4\alpha = 0, \quad 6\alpha^2 = p, \quad 4\alpha^3 = -q, \quad \alpha^4 = r.$$

Отсюда следует, что $\alpha = 0, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0$. Так как при $p = 0, r = 0$ из (1.10) имеем $\Delta = -27q^4$. Поэтому условие $q = 0$ эквивалентно условию $\Delta = 0$. Следовательно, условия (1.15) выполняются.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняются условия (1.15). Тогда $q = 0$ и уравнение (1.8) примет вид $\mu^4 = 0$. Следовательно, $\mu = 0$ четырехкратный действительный корень.

1б). Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \alpha$ - трехкратный, а $\mu_4 = \beta$ - простой действительные корни уравнения (1.8). Тогда из формулы Виета имеем, что $\beta = -3\alpha, \quad p = -6\alpha^2 < 0, \quad q = -8\alpha^3, \quad r = -3\alpha^4$. Отсюда, исключая α , получаем соотношения

$$p^2 + 12r = 0, \quad \left(\frac{q}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0. \quad (1.35)$$

С другой стороны, с учетом первого соотношения (1.35), дискриминант (1.11) можно представить в виде

$$\Delta = -432 \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{3}\right)^3 \right]^2. \quad (1.36)$$

Тогда в силу второго соотношения (1.35) из (1.36) имеем, что $\Delta = 0$. Итак, если $p^2 + 12r = 0$, то второе соотношение из (1.35) и условие $\Delta = 0$ эквивалентны. Следовательно, условие (1.16) выполняется.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть имеет место (1.16). Тогда из (1.11) непосредственно следует, что $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Отсюда и из последнего равенства (1.16) найдем

$$q = \pm \frac{4p}{3} \sqrt{-\frac{p}{6}}, \quad r = -\frac{p^2}{12}.$$

Пусть $q = \frac{4p}{3} \sqrt{-\frac{p}{6}}$. Тогда уравнение (1.8) имеет вид

$$\mu^4 + p\mu^2 + \frac{4p}{3} \sqrt{-\frac{p}{6}} \mu - \frac{p^2}{12} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение имеет один трехкратный и один простой действительные корни:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = -\sqrt{-\frac{p}{6}}, \quad \mu_4 = 3\sqrt{-\frac{p}{6}}.$$

Если $q = -\frac{4p}{3} \sqrt{-\frac{p}{6}}$, то $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = -\sqrt{-\frac{p}{6}}, \mu_4 = -3\sqrt{-\frac{p}{6}}$,

что и требовалось доказать.

1в). Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\mu_1 = \mu_2 = \alpha$, $\mu_3 = \mu_4 = \beta$ - двукратные действительные корни уравнения (1.8). Тогда из формулы Виета имеем

$$\beta = -\alpha, q = 0, p = -2\alpha^2 < 0, r = \alpha^4 > 0.$$

Из последних двух условий получим, что $p^2 - 4r = 0$. При $q = 0$ из (1.10) следует, что $\Delta = 16r(p^2 - 4r)^2$. Так как $r > 0$, то условия $\Delta = 0$ и $p^2 - 4r = 0$ эквивалентны. Следовательно, если уравнение (1.8) имеет два различных двукратных действительных корня, то выполняются условия (1.17).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть имеет место условия (1.17). При $q = 0$ уравнение (1.8) является биквадратным уравнением $\mu^4 + p\mu^2 + r = 0$, дискриминант которого равен $\tilde{\Delta} = p^2 - 4r$. Однако, при $r > 0$, $q = 0$ условия $\Delta = 0$ и $p^2 - 4r = 0$ эквивалентны. Следовательно, $\tilde{\Delta} = 0$. Отсюда следует, что биквадратное уравнение имеет два различных двукратных действительных корня:

$$\mu_1 = \mu_2 = \sqrt{-\frac{p}{2}}, \mu_3 = \mu_4 = -\sqrt{-\frac{p}{2}}.$$

1г). Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть уравнение (1.8) имеет два различных комплексно-сопряженных двукратных корня:

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha + i\beta, \mu_3 = \mu_4 = \alpha - i\beta.$$

Тогда из формулы Виета следует, что

$$\alpha = 0, p = 2\beta^2 > 0, q = 0, r = \frac{p^2}{4} > 0. \text{ Так как при } q = 0, r > 0 \text{ условия}$$

$p^2 - 4r = 0$ и $\Delta = 0$ эквивалентны, то условие (1.18) выполняется.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняется условия (1.18). Тогда, как и в случае 1в), имеем, что $\mu_1 = \mu_2 = i\sqrt{\frac{p}{2}}, \mu_3 = \mu_4 = -i\sqrt{\frac{p}{2}},$ т.е. уравнение (1.8) имеет два различных двукратных чисто мнимых комплексно-сопряженных корня.

1д). Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\mu_1 = \mu_2 = \alpha$ - двукратный и $\mu_3 = \beta, \mu_4 = \gamma$ - простые действительные корни уравнения (1.8). Тогда из формулы Виета имеем

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{\ell - p}{6}}, \beta = \sqrt{\frac{\ell - p}{6}} \pm \sqrt{\frac{-2p - \ell}{3}}, \gamma = -\sqrt{\frac{\ell - p}{6}} \pm \sqrt{\frac{-2p - \ell}{3}},$$

где $\ell = \sqrt{p^2 + 12r}.$

При этом p, q и r взаимосвязаны:

$$q = \pm \frac{2}{3}(2p + \ell)\sqrt{\frac{\ell - p}{6}}. \quad (1.37)$$

Так как α, β и γ действительные числа, то должно быть $p < 0, -p^2 < 12r < 3p^2.$ С другой стороны, дискриминант уравнения (1.8) представим виде

$$\Delta = -(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_4)(\mu_2 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)(\mu_3 - \mu_4).$$

Если учесть, что $\mu_1 = \mu_2 = \alpha$, то $\Delta = 0.$ Итак, условие (1.19) выполняется.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняются условия (1.19). Тогда уравнение (1.8) должен иметь один двукратный действительный корень, который можно определить как общий корень уравнений

$$\mu^4 + p\mu^2 + q\mu + r = 0, \quad 4\mu^3 + 2p\mu + q = 0 \quad (1.38)$$

Исключая отсюда q , придем к уравнению $3\mu^4 + p\mu^2 - r = 0$, действительные корни которого определяются по формуле

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\ell - p}{6}}, \quad \ell = \sqrt{p^2 + 12r}.$$

Отсюда и из второго уравнения (1.38) следует соотношение (1.37). Тогда нетрудно заметить следующее равенство

$$\begin{aligned} & \mu^4 + p\mu^2 + q\mu + r = \\ & = \left(\mu \mp \sqrt{\frac{\ell - p}{6}} \right)^2 \left(\mu - \sqrt{\frac{\ell - p}{6}} \mp \sqrt{\frac{-2p - \ell}{3}} \right) \left(\mu + \sqrt{\frac{\ell - p}{6}} \mp \sqrt{\frac{-2p - \ell}{3}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (1.8) имеет один двукратный и два различных простых действительных корней.

1е). Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть уравнение (1.8) имеет один двукратный действительный и два комплексно-сопряженных корня:

$\mu_1 = \mu_2 = \alpha$, $\mu_3 = \beta + i\gamma$, $\mu_4 = \beta - i\gamma$. Тогда из формулы Виета имеем, что

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{\ell - p}{6}}, \beta = \pm \sqrt{\frac{\ell - p}{6}}, \gamma = \pm \sqrt{\frac{2p + \ell}{3}}, \text{ где } \ell = \sqrt{p^2 + 12r}.$$

Так как по нашему предположению α, β и γ действительные числа, поэтому должно быть $p > -2\sqrt{r}$, $r \geq 0$. Кроме того $\mu_1 = \mu_2 = \alpha$, то $\Delta = 0$. Следовательно, условие (1.20) выполняется.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняется условие (1.20). Тогда, как и в случае 1д), находим, что $\mu = \pm \sqrt{\frac{\ell - p}{6}}$ - двукратный действительный корень, причем

$$q = \pm \frac{2}{3}(2p + \ell) \sqrt{\frac{\ell - p}{6}}.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \mu^4 + p\mu^2 + q\mu + r = \\ & = \left(\mu \mp \sqrt{\frac{\ell - p}{6}} \right)^2 \left(\mu + \sqrt{\frac{\ell - p}{6}} - i \sqrt{\frac{2p + \ell}{3}} \right) \left(\mu - \sqrt{\frac{\ell - p}{6}} - i \sqrt{\frac{2p + \ell}{3}} \right) \end{aligned}$$

Это означает, что уравнение имеет один двукратный действительный и два комплексно-сопряженных корня.

2). Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть уравнение (1.8) имеет четыре различных действительных корня. Эти корни могут быть определены по формуле [81]:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}), & \mu_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}), \\ \mu_3 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}), & \mu_4 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}),\end{aligned}\tag{1.39}$$

где z_1, z_2, z_3 - корни кубической резольвенты

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0,\tag{1.40}$$

удовлетворяющее условию $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -q$. Так как корни уравнения (1.8) действительны, то z_1, z_2 и z_3 должны быть неотрицательными. Поэтому мы должны выяснить при каких p, q и r уравнение (1.40) имеет неотрицательные корни.

Если введем замену

$$z = t - \frac{2p}{3},\tag{1.41}$$

то уравнение (1.40) примет вид

$$t^3 + p_1 t + q_1 = 0,\tag{1.42}$$

где $p_1 = -\frac{1}{3}(p^2 + 12r), \quad q_1 = \frac{1}{27}(72pr - 27q^2 - 2p^3)$

Нетрудно заметить, что дискриминант уравнения (1.42) представим в виде [81]

$$\begin{aligned}\bar{\Delta} &= \left(\frac{q_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_1}{3}\right)^3 = \\ &= -\frac{1}{2916} \left[4(p^2 + 12r)^3 - (72pr - 27q^2 - 2p^3)^2 \right] = -\frac{\Delta}{2916}\end{aligned}\tag{1.43}$$

где Δ - дискриминант уравнения (1.8).

Известно [81], что если $\bar{\Delta} < 0$, то уравнение (1.42) имеет три различных действительных корня. Тогда $\Delta > 0$ и $p_1 < 0$.

Теперь рассмотрим функцию

$$f(z) = z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2.$$

Так как $f(0) = -q^2 < 0$, то график этой функции проходит через точку $(0, -q^2)$. Точки экстремума определим из уравнения

$$f'(z) = 3z^2 + 4pz + p^2 - 4r = 0$$

по формуле $z_{1,2}^* = \frac{-2p \pm \sqrt{p^2 + 12r}}{3}$. Нетрудно заметить, что если

$p < 0$, $0 < p^2 + 12r < 4p^2$, то $z_1^* > 0$, $z_2^* > 0$. Причем в силу того, что

$$f''(z_1^*) = 6z_1 + 4p = 2\sqrt{p^2 + 12r} > 0,$$

$$f''(z_2^*) = 6z_2 + 4p = -2\sqrt{p^2 + 12r} < 0$$

функция $f(z)$ в точке z_1^* имеет минимум, а в точке z_2^* максимум (см. рис. 1).

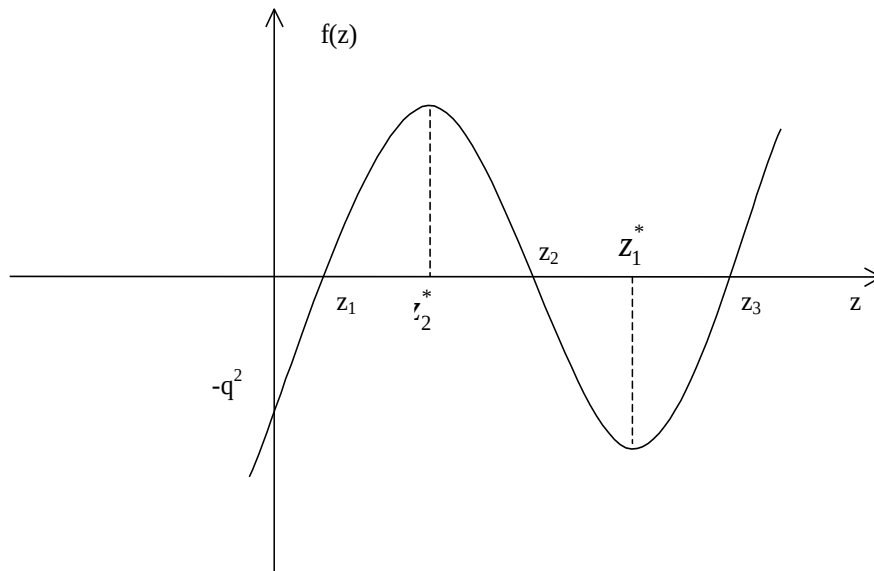


Рис. 1.

Следовательно, корни уравнения (1.40) z_1, z_2, z_3 расположены следующим образом $0 < z_1 < z_2^* < z_2 < z_1^* < z_3 < +\infty$. Итак, все корни уравнения (1.40) положительны; тогда все корни уравнения (1.8) действительны и

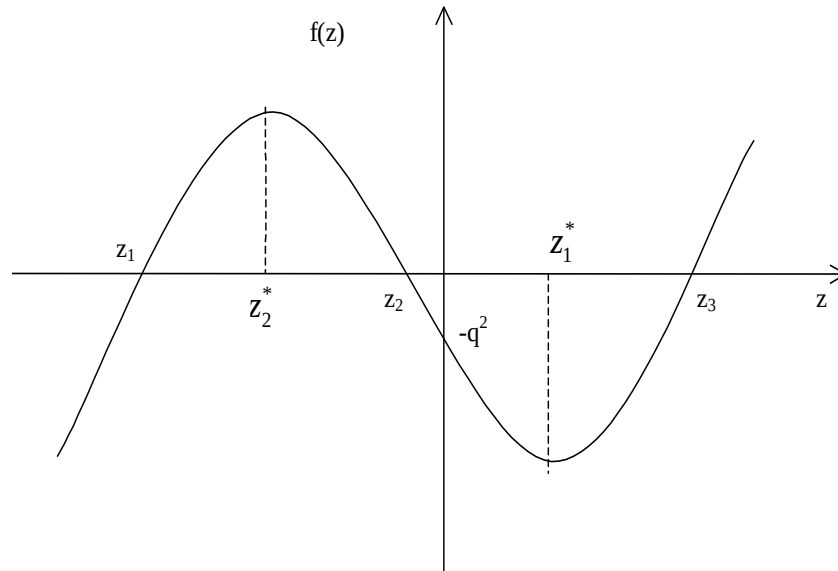


Рис. 2.

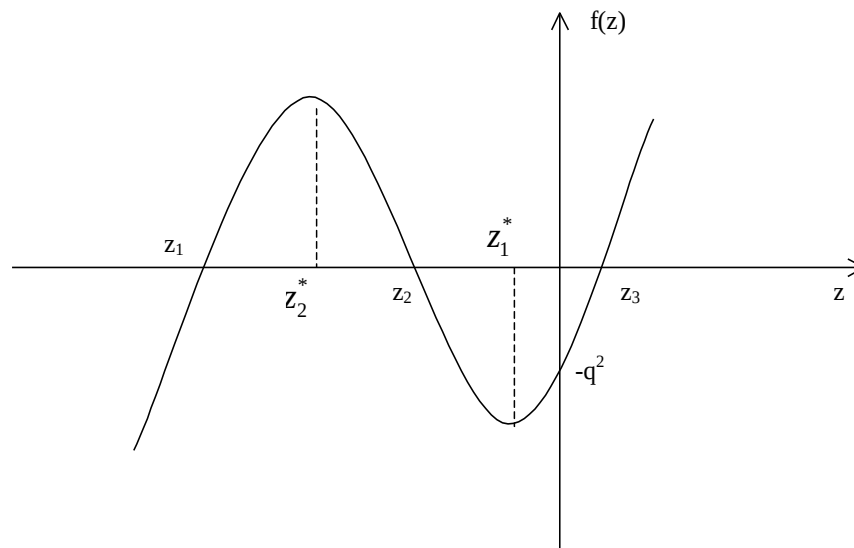


Рис. 3.

различны при условии $\Delta > 0$, $p < 0$, $-p^2 < 12r < 3p^2$, т.е. условия (1.21) выполняются.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть имеют место условия (1.21).

Тогда мы должны доказать, что все корни уравнения (1.8) действительны и различны. Для этого достаточно показать, например, корни уравнения $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, определяемые по формулам (1.39), действительны и различны. А это имеет место в случае, когда корни кубической резольвенты (1.40) z_1, z_2, z_3 неотрицательны. Так как $\Delta > 0$, то из (1.43) имеем, что $\bar{\Delta} < 0$. Здесь $\bar{\Delta}$ - дискриминант уравнения (1.42). Очевидно, что из неравенства $-p^2 < 12r < 3p^2$ следует неравенство $0 < p^2 + 12r < 4p^2$. Следовательно $p_1 = -\frac{1}{3}(p^2 + 12r) < 0$.

Таким образом [81], уравнение (1.42) имеет три различных действительных корня. Далее, проводя аналогичные рассуждения как и в случае 2), убеждаемся в том, что корни уравнения (1.40) расположены следующим образом (см. рис. 1)

$$0 < z_1 < z_2^* < z_2 < z_1^* < z_3 < +\infty.$$

А это означает, что все корни уравнения (1.40) положительны. Тогда из (1.39) следует, что уравнение (1.8) имеет четыре различных действительных корня.

3). Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть имеют место условия (1.22). Проводя аналогичные рассуждение как и в случае 2), найдем точки экстремумов

$$z_{1,2}^* = \frac{-2p \pm \sqrt{p^2 + 12r}}{3}.$$

Нетрудно заметить, что если $r > 0$, $-2\sqrt{r} < p < 2\sqrt{r}$, то $z_1^* > 0$, $z_2^* < 0$, причем в точке z_1^* функция $f(z)$ имеет минимум, а в точке z_2^* - максимум. Таким образом, корни уравнения (1.40) расположены так:

$-\infty < z_1 < z_2^* < z_2 < 0 < z_1^* < z_3 < +\infty$, т.е. корни z_1, z_2 отрицательны, а z_3 - положителен (см. рис. 2). Тогда корни уравнения (1.8) комплексно - сопряжены. Если $r > 0, p > 2\sqrt{r}$, то $z_1^* < 0, z_2^* < 0$, причем, как и в предыдущем случае, в точке z_1^* функция $f(z)$ имеет минимум, а в точке z_2^* - максимум; поэтому корни уравнения расположены следующим образом (см. рис. 3):

$$-\infty < z_1 < z_2^* < z_2 < z_1^* < 0 < z_3 < +\infty.$$

Следовательно, корни z_1, z_2 - отрицательны, а z_3 - положителен. Это означает, что корни уравнения (1.8) комплексно-сопряженные.

Необходимость. Пусть уравнение (1.8) имеет четыре различных комплексно-сопряженных корня. Тогда эти корни можно определить по формулам (1.39). Так как z_1, z_2, z_3 - корни кубической резольвенты (1.40), то один из них будет действительным. Тогда два других корня будут либо действительными, либо комплексно - сопряженными. Если эти корни действительны [81], то $\bar{\Delta} < 0$, т.е. $\Delta > 0$. Тогда, как и в предыдущем случае, убеждаемся в том, что

$$p > -2\sqrt{r}, \quad r > 0, \quad p \neq 2\sqrt{r}.$$

4). Достаточность. Пусть $\Delta < 0$. Тогда из (1.43) вытекает, что $\bar{\Delta} > 0$, следовательно [81], один из корней уравнения (1.42) действительный, а два других - комплексно-сопряженные, причем в силу того, что $-q^2 < 0$, то действительный корень положительный. Пусть для определенности $z_1 > 0, z_2 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), z_3 = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$, где $r = |z_2| = |z_3|$. Так как квадратные корни комплексно - сопряженных чисел комплексно-сопряженные, то из (1.39) следует, что два корня уравнения (1.8) действительные, а два других комплексно-сопряженные.

Необходимость. Пусть μ_1, μ_2 - действительные, а μ_3, μ_4 - комплексно-сопряженные корни уравнения (1.8) (см. (1.39)).

Тогда $\mu_3 + \mu_4 = -\sqrt{z_1}$, $\mu_3 - \mu_4 = \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = i\beta$, где z_1, β - действительные числа, причем $z_1 > 0$. Так как $\mu_1 - \mu_2 = \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = \alpha$ должно быть действительным, то из равенств $\sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = i\beta$, $\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = \alpha$ следует, что z_2 и z_3 комплексно-сопряженные корни уравнения (1.40). Тогда

$\bar{\Delta} > 0$ [81], а в силу (1.43) $\Delta < 0$. Итак, условия (1.23) выполняются.

Лемма 1.3 доказана.

Классификация линейных уравнений в частных производных четвертого порядка по их коэффициентам старших производных имеет следующую геометрическую интерпретацию. Сначала введем в рассмотрение прямоугольную декартовую систему координат pqr . Тогда нетрудно заметить, что классификация корней уравнения (1.8) зависит от знака дискриминанта Δ (см. формулу (1.11)), то есть от расположения чисел p, q и r .

Для наглядного представления расположения корней уравнения (1.8), удобно воспользоваться графиком дискриминантной поверхности $\Delta = 0$. (см. рис. 4), который можно построить методом сечения в трехмерном пространстве переменных p, q и r или же нитяной моделью Клейна-Гартенштейна дискриминантной поверхности [60].

Все перечисленные возможные случаи в точности реализованы на модели [60]. На чертеже (см. рис. 4) часть пространства, заключенная внутри поверхности справа от двойной линии OL , образует область **I**, а слева от той же линии лежит область **III**; пространство же, лежащее вне поверхности, образует область **II**. Теперь классификации корней уравнения (1.8) а пространстве переменных p, q и r можно объяснить следующим образом:

1а). В точке O (т.е. в начале координат) уравнение (1.8) имеет один четырехкратный действительный корень;

1б). На линиях возврата ON и ОК уравнение (1.8) имеет один трехкратный и один простой действительных корней;

1в). На двойной линии OL уравнение (1.8) имеет два различных двукратных действительных корня;

1г). На двойной изолированной линии ОН уравнение (1.8) имеет два различных двукратных комплексно-сопряженных корня;

1д). На поверхности $\Delta = 0$, заключенной между линиями ON, ОК и OL уравнение (1.8) имеет один двукратный действительный и два различных действительных корня;

1е). На поверхности $\Delta = 0$, слева от двойной линии OL уравнение (1.8) имеет один двукратный действительный и два комплексно-сопряженных корня;

2). В области I уравнение (1.8) имеет четыре различных действительных корня;

3) В области III за исключением линии ОН, уравнение (1.8) имеет четыре различных комплексно-сопряженных корня;

4). В области II уравнение (1.8) имеет два различных действительных и два комплексно-сопряженных корня.

Указанная геометрическая интерпретация классификации уравнений четвертого порядков по их коэффициентам еще раз доказывает правильности приведенной классификации, так как вся пространства (см. рис. 4) разбита на соответствующие области, и не осталось не учтенных точек или областей трехмерного пространства.

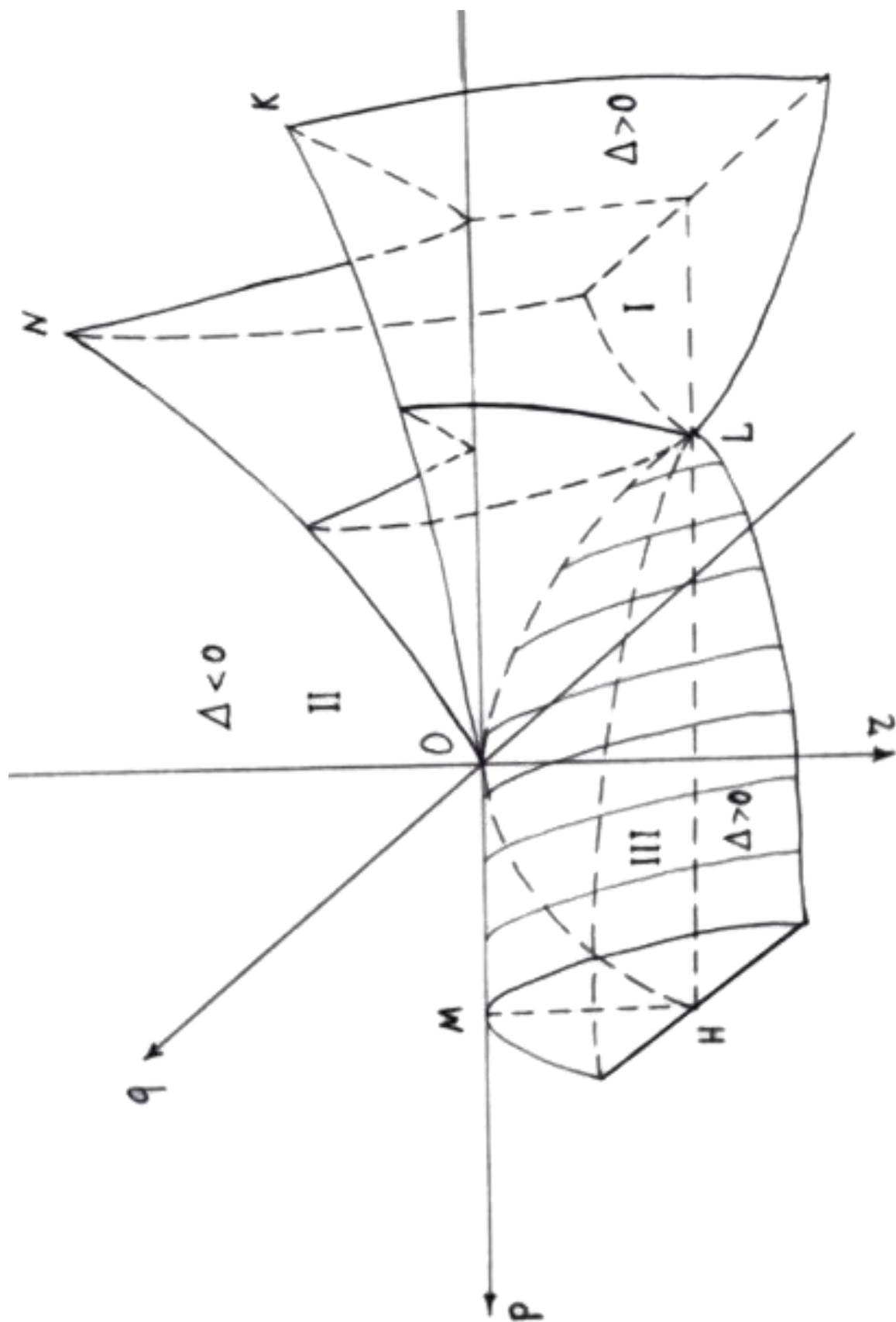


Рис. 4.

§ 1.3. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Основной целью этого параграфа является доказательство теоремы 1.1. Поэтому каждый из случаев теоремы 1.1 рассмотрим в отдельности.

С л у ч а й 1а). Пусть выполняется условие (1.15). Тогда $q = 0$. Поэтому из (1.9) имеем, что $C = \frac{3B^2}{8A}$, $D = \frac{B^3}{16A^2}$, $E = \frac{B^4}{256A^3}$. Следовательно,

но, уравнение (1.5) можно записать в виде $\left(\frac{dy}{dx} - \frac{B}{4A}\right)^4 = 0$. Пусть

$\varphi(x, y) = \text{const}$ - общий интеграл этого уравнения. Положим $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \varphi(x, y)$, где $\xi(x, y)$ - любая функция, не зависящая от $\varphi(x, y)$. В силу

леммы 1.1 имеем, что $\left(\eta_x + \frac{B}{4A}\eta_y\right)^4 = 0$. Это означает, что $E_I \equiv 0$. Нетруд-

но заметить, что B_I , C_I и D_I выражаются формулами (см. (1.3))

$$B_I = 4A\left(\xi_x + \frac{B}{4A}\xi_y\right)^3\left(\eta_x + \frac{B}{4A}\eta_y\right),$$

$$C_I = 6A\left(\xi_x + \frac{B}{4A}\xi_y\right)^2\left(\eta_x + \frac{B}{4A}\eta_y\right)^2, \quad D_I = 4A\left(\xi_x + \frac{B}{4A}\xi_y\right)\left(\eta_x + \frac{B}{4A}\eta_y\right)^3.$$

Тогда $B_I = 0$, $C_I = 0$, $D_I = 0$. Функцию $\xi(x, y)$ выберем так, чтобы

$$A_I = A\left(\xi_x + \frac{B}{4A}\xi_y\right)^4 \neq 0. \text{ Отсюда следует, что уравнение (1.1) приводится}$$

к виду $u_{\xi\xi\xi\xi} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}, u_{\xi\xi\xi}, u_{\xi\xi\eta}, u_{\xi\eta\eta}, u_{\eta\eta\eta}),$

где $\Phi = \frac{F_I}{A_I}$. В дальнейшем для краткости записи аргументы Φ не будем

указывать.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение

$$x^4 u_{xxxx} + 4x^3 y u_{xxx y} + 6x^2 y^2 u_{xx y y} + 4x y^3 u_{x y y y} + y^4 u_{yyyy} = 0,$$

в котором $A = x^4$, $B = 4x^3 y$, $C = 6x^2 y^2$, $D = 4x y^3$, $E = y^4$. Тогда из (1.9) имеем, что $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$. Отсюда следует, что выполняется условие (1.15). Это означает, что при $x \neq 0$, $y \neq 0$ уравнение принадлежит параболическому типу. Согласно общей теории, составляем уравнение характеристик

$$x^4 (dy)^4 - 4x^3 y (dy)^3 dx + 6x^2 y^2 (dy)^2 (dx)^2 - 4x y^3 dy (dx)^3 + y^4 (dx)^4 = 0.$$

Его можно записать в виде $(x dy - y dx)^4 = 0$. Интегрируя это уравнение,

получим $\frac{x}{y} = \text{const}$. Введём новые переменные ξ и η по формулам

$$\xi = x, \eta = \frac{x}{y}. \text{ Тогда уравнение в новых независимых переменных приво-}$$

дится к следующему каноническому виду

$$u_{\xi\xi\xi\xi} - \frac{36\eta^6}{\xi^7} u_{\xi\eta\eta} = 0.$$

С л у ч а й 1б). Пусть выполняется условие (1.16). Тогда уравнение (1.5) имеет два общих интеграла $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$, причем один из них, например, ψ - трехкратный. Положим $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. В силу леммы 1.1 имеем $A_I = 0$, $E_I = 0$. Кроме того, выполняется тождество

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 - B \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + C \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - D \left(\frac{dy}{dx} \right) + E = A \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\psi_x}{\psi_y} \right)^3,$$

на основании которого получаем соотношения

$$B \varphi_y \psi_y = -A (\varphi_x \psi_y + 3 \varphi_y \psi_x), \quad C \varphi_y \psi_y^2 = 3A (\varphi_x \psi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x^2),$$

$$D \varphi_y \psi_y^3 = -A (3 \varphi_x \psi_x^2 \psi_y + \varphi_y \psi_x^3), \quad E \varphi_y \psi_y^3 = A \varphi_x \psi_x^3.$$

Отсюда следует, что $B_I = -\frac{AJ^4}{\varphi_y \psi_y^3} \neq 0$, $C_I \equiv 0$, $D_I \equiv 0$ и уравнение

$$(1.1) \text{ приводится к виду } u_{\xi\xi\xi\eta} = \Phi, \quad \text{где } \Phi = \frac{F_I}{B_I}.$$

Пример 1.2. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^3 u_{xxxx} - (x + 3y)x^2 u_{xxxy} + 3xy(x + y)u_{xxyy} - (3x + y)y^2 u_{xyyy} + y^3 u_{yyyy} = 0.$$

Здесь $A = x^3$, $B = -(x + 3y)x^2$, $C = 3xy(x + y)$, $D = -(3x + y)y^2$, $E = y^3$.

Тогда при $x > 0$ имеем (случай $x < 0$ рассматривается аналогично)

$$p = -\frac{3x}{8}(x - y)^2 < 0, \quad q = \frac{x^2}{8\sqrt{x}}(x - y)^3, \quad r = -\frac{3x^2(x - y)^4}{256} < 0,$$

причем $\Delta = 0$, $p^2 + 12r = 0$. Это означает, что условие (1.16) выполняется.

Следовательно, уравнение принадлежит гиперболическому типу. Уравнение характеристик имеет вид

$$(dy + dx)(xdy + ydx)^3 = 0.$$

Отсюда находим характеристики: $x + y = \text{const}$, $xy = \text{const}$. Выбирая

$\xi = x + y$, $\eta = xy$ получим

$$u_{\xi\xi\xi\eta} + \frac{3\xi}{\xi^2 - 4\eta} u_{\xi\xi\eta} - \frac{6\eta}{\xi^2 - 4\eta} u_{\xi\eta\eta} - \frac{6\xi\eta}{(\xi^2 - 4\eta)^2} u_{\eta\eta} = 0.$$

С л у ч а й 1в). Пусть выполняется условие (1.17). Тогда уравнение (1.5) имеет два общих интеграла $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$, причем каждый из них двукратный. Положим $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. Тогда, как и выше, имеем $A_I \equiv 0$, $E_I \equiv 0$ и

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - B\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - D\left(\frac{dy}{dx}\right) + E = A\left(\frac{dy}{dx} + \frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2.$$

Отсюда следует, что $2A(\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) = -B\varphi_y \psi_y$,

$$A(\varphi_x^2 \psi_y^2 + 4\varphi_x \varphi_y \psi_x \psi_y + \varphi_y^2 \psi_x^2) = C\varphi_y^2 \psi_y^2,$$

$$2A(\varphi_x^2 \psi_x + \varphi_x \psi_x^2) = -D\varphi_y^2 \psi_y^2, A\varphi_x^2 \psi_x^2 = E\varphi_y^2 \psi_y^2.$$

Поэтому $B_1 = 0, D_1 = 0$ и $C_1 = -\frac{AJ}{\varphi_y^2 \psi_y^2} \neq 0$. Тогда уравнение (1.1) при-

водится к виду $u_{\xi\xi\eta\eta} = \Phi$, где $\Phi = \frac{F_1}{C_1}$.

Если введем замену $s = \xi + \eta$, $t = \xi - \eta$, то уравнение запишется в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (u_{ss} - u_{tt}) = \Phi.$$

Пример 1.3. Рассмотрим уравнение

$$u_{xxxx} - 2yu_{xxyy} + y^2 u_{yyyy} - u_{xxy} + 3yu_{yy} + \frac{3}{4}u_{yy} = 0,$$

в котором $A=1, B=0, C=-2y, D=0, E=y^2$. Очевидно, что $p=-2y, q=0, r=y^2$. Тогда $\Delta=0$. Если $y>0$, то выполняется условие (1.17) и уравнение характеристик имеет два различных двукратных действительных общих интеграла. Следовательно, уравнение принадлежит гиперболическому типу.

Введя замену $\xi = x - 2\sqrt{y}$, $\eta = x + 2\sqrt{y}$, его можно привести к каноническому виду $u_{\xi\xi\eta\eta} = 0$, из которого легко можно выписать общее решение

$$u(\xi, \eta) = \xi f_1(\eta) + \eta f_2(\xi) + f_3(\xi) + f_4(\eta).$$

Переходя к старым переменным, имеем

$$u(x, y) = (x - 2\sqrt{y})f_1(x + 2\sqrt{y}) + (x + 2\sqrt{y})f_2(x - 2\sqrt{y}) + f_3(x - 2\sqrt{y}) + f_4(x + 2\sqrt{y}).$$

Случай 1г). Пусть выполняется условие (1.18). Тогда уравнения (1.5) имеет два двукратных комплексно-сопряженных интеграла:

$$\varphi(x, y) \equiv \alpha(x, y) + i\beta(x, y) = const,$$

$$\psi(x, y) \equiv \alpha(x, y) - i\beta(x, y) = \text{const.}$$

Заметим, что из (1.18) непосредственно следует $p^2 - 4r = 0$. Тогда нетрудно определить, что

$$E = \frac{(4AC - B^2)^2}{64A^3} > 0, C = \frac{B^2}{2A} + 2\sqrt{A}\sqrt{E}, D = B\sqrt{E}\sqrt{A}.$$

Кроме того $4AC - B^2 = 4A\left(p + \frac{B^2}{8A}\right) > 0$, так как $A > 0$. Поэтому, если

введем замену $\xi = \alpha(x, y)$, $\eta = \beta(x, y)$, $J \neq 0$, то

$$\begin{aligned} A\varphi_x^4 + B\varphi_x^3\varphi_y + C\varphi_x^2\varphi_y^2 + D\varphi_x\varphi_y^3 + E\varphi_y^4 &= A\left(\varphi_x^2 + \frac{B}{4A}\varphi_x\varphi_y + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{A}}\varphi_y^2\right)^2 = \\ &= \left(\alpha_x^2 + \frac{B}{2A}\alpha_x\alpha_y + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{A}}\alpha_y^2\right) - \left(\beta_x^2 + \frac{B}{2A}\beta_x\beta_y + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{A}}\beta_y^2\right) + \\ &+ i\left(2\alpha_x\beta_x + \frac{B}{2A}\alpha_x\beta_y + \frac{B}{2A}\alpha_y\beta_x + 2\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{A}}\alpha_y\beta_y\right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 + \frac{B}{2A}\alpha_x\alpha_y + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{A}}\alpha_y^2 &= \beta_x^2 + \frac{B}{2A}\beta_x\beta_y + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{A}}\beta_y^2, \\ 2\alpha_x\beta_x + \frac{B}{2A}\alpha_x\beta_y + \frac{B}{2A}\alpha_y\beta_x + 2\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{A}}\alpha_y\beta_y &= 0. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Используя (1.44) из (1.3), имеем, что $A_I = E_I$, $B_I = 0$, $C_I = 2A_I$, $D_I = 0$.

Тогда уравнение (1.2) имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = \Phi,$$

где $\Phi = \frac{F_I}{A_I}$.

Пример 1.4. В качестве примера возьмем уравнение, приведенное в примере 1.3. Если $y < 0$, то выполняется условие (1.18) и уравнение

принадлежит к эллиптическому типу. Уравнение характеристик имеет два двукратных комплексно-сопряженных интеграла

$x + 2\sqrt{-y}i = \text{const}$, $x - 2\sqrt{-y}i = \text{const}$. С помощью замены

$\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{-y}$ уравнение приводится к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = 0.$$

С л у ч а й 1д). Пусть выполняются условия (1.19). Тогда уравнение (1.5) имеет три различных общих интеграла:

$$\varphi(x, y) = \text{const}, \quad \psi(x, y) = \text{const}, \quad \chi(x, y) = \text{const},$$

причем один из них, например $\chi(x, y)$ - двукратный. Следовательно, можно выбрать три замены

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y); \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \chi(x, y); \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \psi(x, y), \\ \eta = \chi(x, y); \end{cases} \quad (1.45)$$

Однако независимо от того, какую замену из (1.45) будем использовать, в силу леммы 1.1 имеем $A_I \equiv 0$ и $E_I \equiv 0$. Кроме того, выполняется тождество

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 - B \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + C \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - D \left(\frac{dy}{dx} \right) + E = A \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\psi_x}{\psi_y} \right) \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\chi_x}{\chi_y} \right)^2,$$

на основании которого получаем соотношения

$$B\varphi_y\psi_y\chi_y = -A(\varphi_x\psi_y\chi_y + \varphi_y\psi_x\chi_y + 2\varphi_y\psi_y\chi_x), \quad E\varphi_y\psi_y\chi_y^2 = A\varphi_x\psi_x\chi_x^2,$$

$$C\varphi_y\psi_y\chi_y^2 = A(\varphi_x\psi_x\chi_y^2 + 2\varphi_x\psi_y\chi_x\chi_y + 2\varphi_y\psi_x\chi_x\chi_y + \varphi_y\psi_y\chi_x^2),$$

$$D\varphi_y\psi_y\chi_y^2 = -A(2\varphi_x\psi_x\chi_x\chi_y + \varphi_x\psi_y\chi_x^2 + \varphi_y\psi_x\chi_x^2).$$

Отсюда следует, что

$$B_I = - \frac{A(\varphi_x\chi_y - \varphi_y\chi_x)^3(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x)}{\varphi_y\psi_y\chi_y^2} \neq 0,$$

$$C_I = \frac{A(\varphi_x \chi_y - \varphi_y \chi_x)^3 (\psi_x \chi_y - \psi_y \chi_x)}{\varphi_y \psi_y \chi_y^2} \neq 0, \quad D_I = 0$$

и уравнение (1.1) приводится к виду

$$B_I u_{\xi\xi\xi\eta} + C_I u_{\xi\xi\eta\eta} = F_I. \quad (1.46)$$

Для дальнейшего упрощения (1.46) используем преобразование переменных $s = s(\xi, \eta)$, $t = t(\xi, \eta)$, $J \neq 0$. Тогда получим уравнение

$$A_2 u_{ssss} + B_2 u_{ssst} + C_2 u_{sstt} + D_2 u_{sttt} + E_2 u_{tttt} = F_2, \quad (1.47)$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= B_1 s_\xi^2 s_\eta + C_1 s_\xi^2 s_\eta^2, & E_2 &= B_1 t_\xi^3 t_\eta + C_1 t_\xi^2 t_\eta^2, \\ B_2 &= B_1 (s_\xi^3 t_\eta + 3s_\xi^2 s_\eta t_\xi) + 2C_1 (s_\xi^2 s_\eta t_\eta + s_\xi s_\eta^2 t_\xi), \\ C_2 &= 3B_1 (s_\xi^2 t_\xi t_\eta + s_\xi s_\eta t_\xi^2) + C_1 (s_\xi^2 t_\eta^2 + 4s_\xi s_\eta t_\xi t_\eta + s_\eta^2 t_\xi^2), \\ D_2 &= B_1 (3s_\xi t_\xi^2 t_\eta + s_\eta t_\xi^3) + 2C_1 (s_\xi t_\xi t_\eta^2 + s_\eta t_\xi^2 t_\eta). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Выберем переменные s и t так, чтобы уравнение (1.47) имело наиболее простую форму. Характеристическое уравнение (1.46) имеет вид

$$-B_I \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^3 + C_I \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 = 0, \quad (1.49)$$

причем в силу (1.14) $\Delta_I = 0$. Общими интегралами уравнения (1.49) являются $\eta = \text{const}$, $f(\xi, \eta) = \text{const}$. Соотношение $f(\xi, \eta) = c$, $c = \text{const}$, можно представить в виде $h = h(\xi, c)$ (функция h существует и дифференцируема в некоторой окрестности произвольной точки (ξ_0, η_0) по теореме о неявной функции), причем выполняется равенство [52, с.146]

$$B_I(\xi, \eta) \frac{dh(\xi, f(\xi, \eta))}{d\xi} = C_I(\xi, \eta).$$

Положим $s = \eta$, $t = \eta - h(\xi, c)$. Тогда из (1.48) следует, что

$A_2 \equiv 0$, $B_2 \equiv 0$, $C_2 = D_2 = C_1 t_\xi^2$, $E_2 \equiv 0$ и уравнение (1.47) сводится к виду

$$u_{sstt} + u_{sttt} = \frac{F_2}{C_2}.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение после замены $z = 2t - s$, $\zeta = s$ можно свести к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (u_{zz} - u_{\zeta\zeta}) = \Phi,$$

где $\Phi = -\frac{F_2}{4C_2}$.

Пример 1.5. Рассмотрим уравнение

$$y^2 u_{xxxx} - 2xyu_{xxxy} + (x^2 - y^2)u_{xxyy} + 2xyu_{xyyy} - x^2 u_{yyyy} = 0.$$

Для определения типа уравнения найдем коэффициенты p, q, r и дискриминант Δ , согласно формулам (1.9) и (1.11):

$$p = -\frac{1}{2}(x^2 + 2y^2), \quad q = -xy^2, \quad r = \frac{x^2}{16}(x^2 - 4y^2), \quad \Delta = 0.$$

Нетрудно заметить, что $p < 0$ и $-p^2 < 12r < 3p^2$. Следовательно, выполняется условие (1.19). Тогда, согласно указанной классификации, уравнение принадлежит к гиперболическому типу. Для приведения к каноническому виду последовательно будем использовать следующие замены:

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x^2 + y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} t = \eta - \frac{\xi^2}{2}, \\ s = \eta; \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2t - s, \\ \zeta = s. \end{cases}$$

В результате мы приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u_{zz} - u_{\zeta\zeta}) - \frac{5z}{2(z^2 - \zeta^2)} u_{zzz} + \frac{\zeta}{2(z^2 - \zeta^2)} u_{zz\zeta} + \frac{5z}{2(z^2 - \zeta^2)} u_{z\zeta\zeta} - \\ & - \frac{\zeta}{2(z^2 - \zeta^2)} u_{\zeta\zeta\zeta} - \frac{1}{2(z^2 - \zeta^2)} u_{zz} + \frac{1}{2(z^2 - \zeta^2)} u_{\zeta\zeta} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема 1.1 доказана.

§ 1.4. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе приводится доказательство теоремы 1.2. Рассмотрим уравнение (1.1) в случае, когда коэффициенты A, B, C, D и E постоянные. Теперь достаточно использовать линейные преобразования переменных $\xi = \alpha x + \beta y, \eta = \gamma x + \delta y$, причем $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Ясно, что формулы (1.3) будут верны, если заменить $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ через α, β, γ и δ соответственно. Выберем коэффициенты α, β, γ и δ так, чтобы уравнение (1.2) имело каноническую форму.

Доказательство теоремы 1.1, когда коэффициенты уравнения (1.1) постоянны, вполне аналогично общему случаю (см. § 1.3), поэтому на случаи 1а) - 1д) останавливаться не будем.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.2. С л у ч а й 1е). Пусть выполняется условие (1.20). Тогда уравнение (1.6) имеет один двукратный действительный и два комплексно-сопряженных корня: $\lambda = \ell, \lambda = a + i\beta, \lambda^* = a - i\beta$.

Возможны замены:

$$1^0 \begin{cases} \xi = \alpha x - y \\ \eta = \beta x; \end{cases} \quad 2^0 \begin{cases} \xi = \alpha x - y \\ \eta = \ell x - y; \end{cases} \quad 3^0 \begin{cases} \xi = \ell x - y, \\ \eta = \beta x. \end{cases}$$

Используем замену 1^0 . Тогда из (1.3) имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= A\alpha^4 - B\alpha^3 + C\alpha^2 - D\alpha + E, \quad D_1 = (4A\alpha - B)\beta^3, \\ B_1 &= (4A\alpha^3 - 3B\alpha^2 + 2C\alpha - D)\beta, \quad E_1 = A\beta^4, \\ C_1 &= (6A\alpha^2 - 3B\alpha + C)\beta^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, из формулы Виета, найдем

$$B = 2A(\alpha + \ell), \quad C = A(\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\ell + \ell^2),$$

$$D = 2A\ell(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\ell), \quad E = A\ell^2(\alpha^2 + \beta^2).$$

Тогда уравнение (1.1) приводится к виду

$$A_1 u_{\xi\xi\xi\xi} + B_1 u_{\xi\xi\xi\eta} + C_1 u_{\xi\xi\eta\eta} + D_1 u_{\xi\eta\eta\eta} + E_1 u_{\eta\eta\eta\eta} = F_1, \quad (1.50)$$

где

$$A_1 = A(\alpha - \ell)^2 \beta^2, \quad B_1 = 2A(\alpha - \ell)^2 \beta^3, \quad E_1 = A\beta^4, \quad C_1 = A_1 + E_1.$$

Характеристическое уравнение уравнения (1.50) имеет вид

$$\left[A_1 \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 - B_1 \frac{d\eta}{d\xi} + E_1 \right] \cdot \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + 1 \right] = 0.$$

Нетрудно заметить, что $B_1^2 - 4A_1E_1 = 0$. Тогда $\frac{\beta}{\alpha - \ell} \xi - \eta = \text{const}$

является двукратной характеристикой. Положим $t = \frac{\beta}{\alpha - \ell} \xi - \eta$, а s выби-

раем так, чтобы выполнялись равенства $s_\xi = t_\eta$, $s_\eta = -t_\xi$.

Следовательно, $s = -\xi - \frac{\beta}{\alpha - \ell} \eta$, причем

$$J = s_\xi t_\eta - s_\eta t_\xi = 1 + \frac{\beta^2}{(\alpha - \ell)^2} \neq 0.$$

Таким образом, после указанной замены уравнение (1.50) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} (u_{ss} + u_{tt}) = \Phi,$$

где

$$\Phi = \frac{F_2}{A_2}, \quad A_2 = A_1 \left[1 + \frac{\beta^2}{(\alpha - \ell)^2} \right]^2.$$

З а м е ч а н и е 1.3. Если используем замену 2^0 или 3^0 , то уравнение (1.1) приводится к виду

$$A_1 u_{\xi\xi\xi\xi} + B_1 u_{\xi\xi\xi\eta} + C_1 u_{\xi\xi\eta\eta} + D_1 u_{\xi\eta\eta\eta} = F_1$$

или

$$B_1 u_{\xi\xi\xi\eta} + C_1 u_{\xi\xi\eta\eta} + D_1 u_{\xi\eta\eta\eta} + E_1 u_{\eta\eta\eta\eta} = F_1.$$

Но для приведения этих уравнений к каноническому виду опять придется использовать замену типа I^0 .

Пример 1.6. Привести к каноническому виду уравнение

$$4u_{xxxx} + 4u_{xxx\eta} + 5u_{xx\eta\eta} + 4u_{x\eta\eta\eta} + u_{\eta\eta\eta\eta} + 125u = 0.$$

Так как $A = 4, B = 4, C = 5, D = 4, E = 1, R = 125$, то

$$p = \frac{7}{4}, q = -4, r = \frac{17}{16}.$$

Следовательно, $\Delta = 0$. Заметим, что условия (1.20) выполняются. Значит уравнение является уравнением составного типа. Характеристическое уравнение уравнения характеристик имеет вид

$$4\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \text{ или } (2\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Следовательно, $\lambda = \frac{1}{2}$ - двукратный действительный, а $\lambda = \pm i$ комплексно

- сопряженные корни. Так как $B = D, C = A + E, B^2 - 4AC = 0$, то выберем

следующую замену: $t = \frac{1}{2}\xi - \eta, s = -\xi - \frac{1}{2}\eta$. Тогда

$s_\xi = t_\eta, s_\eta = -t_\xi, J = s_\xi t_\eta - s_\eta t_\xi = \frac{5}{4}$ и уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}(u_{ss} + u_{tt}) + 16u = 0.$$

Случай 2). Пусть выполняется условие (1.21). Тогда уравнение (1.6) имеет четыре различных действительных корня:

$$\lambda = \ell_1, \lambda = \ell_2, \lambda = \ell_3, \lambda = \ell_4.$$

Возможны шесть замен:

$$\begin{cases} \xi = \ell_1 x - y, \\ \eta = \ell_2 x - y; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \ell_1 x - y \\ \eta = \ell_3 x - y; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \ell_1 x - y, \\ \eta = \ell_4 x - y; \end{cases} \quad (1.51)$$

$$\begin{cases} \xi = \ell_2 x - y, \\ \eta = \ell_3 x - y; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \ell_2 x - y, \\ \eta = \ell_4 x - y; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \ell_3 x - y, \\ \eta = \ell_4 x - y. \end{cases}$$

Однако независимо от того, какую замену из (1.51) будем использовать, всегда будем иметь уравнение вида (в данном случае выбрали первую замену)

$$B_1 u_{\xi\xi\xi\eta} + C_1 u_{\xi\xi\eta\eta} + D_1 u_{\xi\eta\eta\eta} = F_1, \quad (1.52)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= -A(\ell_1 - \ell_2)^2(\ell_1 - \ell_3)(\ell_1 - \ell_4), \\ D_1 &= -A(\ell_1 - \ell_2)^2(\ell_2 - \ell_3)(\ell_2 - \ell_4), \\ C_1 &= -A(\ell_1 - \ell_2)^2[(\ell_1 - \ell_3)(\ell_2 - \ell_4) + (\ell_1 - \ell_4)(\ell_2 - \ell_3)]. \end{aligned}$$

Уравнение (1.52) запишем в виде

$$u_{\xi\xi\xi\eta} + (m + n)u_{\xi\xi\eta\eta} + mnu_{\xi\eta\eta\eta} = F_2, \quad (1.53)$$

где

$$m = \frac{\ell_2 - \ell_3}{\ell_1 - \ell_3}, \quad n = \frac{\ell_2 - \ell_4}{\ell_1 - \ell_4}, \quad F_2 = -\frac{F_1}{A(\ell_1 - \ell_2)^2(\ell_1 - \ell_3)(\ell_1 - \ell_4)}.$$

Уравнение характеристик уравнения (1.53) имеет вид

$$d\xi d\eta (d\eta^2 - (m + n)d\eta d\xi + mn d\xi^2) = 0.$$

Следовательно, будем иметь следующие характеристики:

$$\xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const}, \quad m\xi - \eta = \text{const}, \quad n\xi - \eta = \text{const}.$$

Введя замену $s = m\xi + \eta$, $t = m\xi - \eta$, $J = -2m \neq 0$, уравнение (1.53) приведем к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)(u_{ss} - u_{tt}) = F_3, \quad (1.54)$$

где

$$a = \frac{m + n}{n - m} = \frac{(\ell_1 - \ell_3)(\ell_2 - \ell_4) + (\ell_1 - \ell_4)(\ell_2 - \ell_3)}{(\ell_1 - \ell_2)(\ell_3 - \ell_4)}, \quad F_3 = \frac{F_2}{2m^2(m - n)}.$$

Заметим, что $m - n \neq 0$, так как в противном случае имели бы равенство $\ell_3 = \ell_4$, что невозможно.

З а м е ч а н и е 1.4. При $a = 0$ уравнение (1.54) примет наиболее простой вид

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(u_{ss} - u_{tt}) = F_3.$$

Это имеет место, например, в случае, когда корни ℓ_3 и ℓ_4 линейно зависимы от ℓ_1 и ℓ_2 :

$$\ell_3 = \frac{k}{k-1}\ell_1 - \frac{1}{k-1}\ell_2, \ell_4 = \frac{k}{k+1}\ell_1 + \frac{1}{k+1}\ell_2, \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0, \pm 1. \quad (1.55)$$

П р и м е р 1.7. Привести к простому виду уравнение

$$3u_{xxxx} + 13u_{xxxy} + 18u_{xxyy} + 8u_{xyyy} = 0. \quad (1.56)$$

Так как $A = 3, B = 13, C = 18, D = 8, E = 0$, то

$$p = -\frac{25}{8}, q = -\frac{35}{24\sqrt{3}}, r = \frac{143}{768}.$$

Заметим что $p < 0, \Delta > 0, -p^2 < 12r < 3p^2$. Следовательно, условие (1.21) выполняется. Тогда уравнение (1.56) принадлежит к строго гиперболическому типу. Корни характеристического уравнения

$$3\lambda^4 - 13\lambda^3 + 18\lambda^2 - 8\lambda = 0 \text{ действительны и различны:}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = \frac{4}{3}, \text{ причем при } k = 2 \text{ выполняется условие}$$

(1.55). Введем замену $\xi = x - y, \eta = 2x - y, J = 1$. Тогда уравнение (1.56) переходит в уравнению

$$u_{\xi\xi\xi\eta} - 4u_{\xi\eta\eta\eta} = 0.$$

Уравнение характеристик этого уравнения имеет вид

$$-d\eta^3 d\xi + 4d\eta d\xi^3 = 0,$$

из которого найдем характеристики

$$\xi = \text{const}, \eta = \text{const}, 2\xi + \eta = \text{const}, 2\xi - \eta = \text{const}.$$

Введя замену $s = 2\xi + \eta, t = 2\xi - \eta, J = -4$, будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (u_{ss} - u_{tt}) = 0.$$

С л у ч а й 3). Пусть выполняется условие (1.22). Тогда уравнение (1.6) имеет четыре различных комплексно - сопряженных корня:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \lambda_3 = \gamma + i\delta, \lambda_4 = \gamma - i\delta. \quad (1.57)$$

Следовательно, возможны шесть замен

$$\begin{array}{lll} 1^0 \begin{cases} \xi = \alpha x - y, \\ \eta = \beta x; \end{cases} & 2^0 \begin{cases} \xi = \gamma x - y, \\ \eta = \delta x; \end{cases} & 3^0 \begin{cases} \xi = \alpha x - y, \\ \eta = \gamma x - y; \end{cases} \\ 4^0 \begin{cases} \xi = \alpha x - y, \\ \eta = \delta x; \end{cases} & 5^0 \begin{cases} \xi = \beta x, \\ \eta = \gamma x - y; \end{cases} & 6^0 \begin{cases} \xi = \beta x, \\ \eta = \delta x. \end{cases} \end{array}$$

Рассмотрим замену 1^0 . Тогда, как и в случае 1е), получим уравнение вида (1.50). Из формулы Виета имеем, что

$$B = 2A(\alpha + \gamma), \quad C = A(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 4\alpha\gamma),$$

$$D = 2A(\alpha^2\gamma + \beta\gamma^2 + \alpha\gamma^2 + \alpha\delta^2), \quad E = A(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2).$$

Тогда для коэффициентов уравнения (1.50) получим следующие формулы:

$$A_1 = A\beta^2[(\alpha - \gamma)^2 + \delta^2], \quad B_1 = D_1 = 2A\beta^3(\alpha - \gamma), \quad E_1 = A\beta^4, \quad C_1 = A_1 + E_1.$$

Следовательно, уравнение (1.50) можно записать в виде

$$L(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = F_1, \quad (1.58)$$

где

$$L = A_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + B_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + E_1 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Так как $B_1^2 - 4A_1E_1 = -4A^2\beta^2\delta^2 < 0$, то оператор L - эллиптический.

Для дальнейшего упрощения уравнения (1.58) введем замену

$$s = s(\xi, \eta), \quad t = t(\xi, \eta), \quad \text{причем потребуем выполнения условия}$$

$$t_\xi = -s_\eta, \quad t_\eta = s_\xi.$$

Тогда получим уравнение

$$A_2 u_{ssss} + B_2 u_{ssst} + C_2 u_{sstt} + D_2 u_{sttt} + E_2 u_{tttt} = F_2, \quad (1.59)$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= (A_1 s_\xi^2 + B_1 s_\xi s_\eta + E_1 s_\eta^2)(s_\xi^2 + s_\eta^2), \\ B_2 = D_2 &= [B_1 s_\xi^2 - 2(A_1 - E_1)s_\xi s_\eta - B_1 s_\eta^2] s_\xi^2 + s_\eta^2, \\ C_2 &= (A_1 + E_1)(s_\xi^2 + s_\eta^2), E_2 = (E_1 s_\xi^2 - B_1 s_\xi s_\eta + A_1 s_\eta^2)(s_\xi^2 + s_\eta^2). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Теперь в качестве $s = s(\xi, \eta)$ выбираем одну из двух действительных характеристик уравнения

$$B_1(d\eta)^2 + 2(A_1 - E_1)d\eta d\xi - B_1(d\xi)^2 = 0, \quad (1.61)$$

например

$$s = m\xi + \eta, \quad m = \frac{A_1 - E_1 + \sqrt{(A_1 - E_1)^2 + B_1^2}}{B_1}.$$

Тогда $t = -\xi + m\eta$. Поэтому из (1.60) имеем, что

$$B_2 = D_2 = 0, C_2 = A_2 + E_2,$$

причем $A_2 > 0$, $E_2 > 0$. Тогда уравнение (1.59) запишется в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (u_{ss} + u_{tt}) = \Phi, \quad (1.62)$$

где

$$b = \frac{E_2}{A_2} > 0, \quad \Phi = \frac{F_2}{A_2}. \text{ причем } b \neq 1, \text{ так как } A_2 \neq E_2, B_1 \neq 0.$$

З а м е ч а н и е 1.5. Если $\alpha = \gamma$, то $B_1 = D_1 = 0$ и уравнение (1.58)

имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + b_1 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = \Phi_1,$$

$$\text{где } b_1 = \frac{E_1}{A_1} > 0, \quad \Phi_1 = \frac{F_1}{A_1}. \text{ причем } b_1 \neq 1, \text{ так как } \beta \neq \pm \delta.$$

З а м е ч а н и е 1.6. Если используем замену 2^0 , то рассуждая так же, как и выше, мы придем к уравнению (1.62). Если используем остальные

замены, то вид уравнения не упрощается, а корни характеристического уравнения будут такими же как в (1.57). Поэтому для дальнейшего упрощения мы должны опять использовать замену типа I^0 или 2^0 .

Пример 1.8. Рассмотрим уравнение

$$u_{xxxx} + 3u_{xxxy} - 6u_{xyyy} + 10u_{yyyy} = 0.$$

Здесь $A=1$, $B=0$, $C=3$, $D=-6$, $E=10$. Следовательно $p=3$, $q=6$, $r=10$, $\Delta=270400$. Заметим, что условия (1.22) выполняются, поэтому характеристическое уравнение $\lambda^4 + 3\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ имеет четыре различных комплексно - сопряженных корня: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, $\lambda_{3,4} = 1 \pm 2i$. Введя замену $\xi = x - y$, $\eta = 2x$, будем иметь

$$5u_{\xi\xi\xi\xi} + 8u_{\xi\xi\xi\eta} + 9u_{\xi\xi\eta\eta} + 8u_{\xi\eta\eta\eta} + 4u_{\eta\eta\eta\eta} = 0.$$

Составляем уравнение вида (1.61):

$$4d\eta^2 + d\eta d\xi - 4d\xi^2 = 0.$$

Выберем одну из действительных характеристик этого уравнения, например, $m\xi + \eta = \text{const}$, где $m = \frac{1 + \sqrt{65}}{8}$. Тогда новая замена имеет вид

$s = m\xi + \eta$, $t = -\xi + m\eta$, а уравнение приводится к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (u_{ss} + u_{tt}) = 0,$$

где $b = \frac{9 - 7m}{m^2 + 9m + 8} > 0$.

С л у ч а й 4). Пусть выполняется условие (1.23). Тогда уравнение (1.6) имеет два различных действительных и два комплексно - сопряженных корня: $\lambda_1 = \ell_1$, $\lambda_2 = \ell_2$, $\lambda_3 = \alpha + i\beta$, $\lambda_4 = \alpha - i\beta$.

Поэтому возможны следующие замены:

$$\begin{array}{lll}
 1^0 \begin{cases} \xi = \alpha x - y, \\ \eta = \beta x; \end{cases} & 2^0 \begin{cases} \xi = \ell_1 x - y, \\ \eta = \ell_2 x - y; \end{cases} & 3^0 \begin{cases} \xi = \alpha x - y, \\ \eta = \ell_1 x - y; \end{cases} \\
 4^0 \begin{cases} \xi = \beta x, \\ \eta = \ell_1 x - y; \end{cases} & 5^0 \begin{cases} \xi = \ell_2 x - y, \\ \eta = \alpha x - y; \end{cases} & 6^0 \begin{cases} \xi = \ell_2 x - y, \\ \eta = \beta x. \end{cases}
 \end{array}$$

Рассмотрим замену 1^0 . Тогда, как и в случае 1e), получим уравнение вида (1.50). Из формулы Виета имеем, что

$$\begin{aligned}
 B &= A(\ell_1 + \ell_2 + 2\alpha), \quad C = A[\ell_1 \ell_2 + 2\alpha(\ell_1 + \ell_2) + \alpha^2 + \beta^2], \\
 D &= A[2\alpha \ell_1 \ell_2 + (\ell_1 + \ell_2)(\alpha^2 + \beta^2)], \quad E = A\ell_1 \ell_2(\alpha^2 + \beta^2).
 \end{aligned}$$

Следовательно, для коэффициентов уравнения (1.50) получим следующие формулы

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A\beta^2(\alpha - \ell_1)(\alpha - \ell_2), & B_1 &= D_1 = A\beta^2(2\alpha - \ell_1 - \ell_2), \\
 C_1 &= A\beta^2[(\alpha - \ell_1)(\alpha - \ell_2) + \beta^2], & E_1 &= A\beta^4.
 \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что $C_1 = A_1 + E_1$. Поэтому уравнение (1.50) можно записать в виде (1.58). Так как

$$B_1^2 - 4A_1E_1 = A^2\beta^6(\ell_1 - \ell_2)^2 > 0,$$

то оператор L - гиперболический. Для дальнейшего упрощения (1.58) введем замену $s = s(\xi, \eta), t = t(\xi, \eta)$, при этом потребуем выполнения условия $t_\xi = -s_\eta, t_\eta = s_\xi$. Тогда получим уравнение вида (1.59), где коэффициенты определяются по формулам (1.60). В качестве $s = s(\xi, \eta)$ выбираем одну из действительных характеристик уравнения

$$E_1(d\eta)^2 + B_1d\eta d\xi + A_1(d\xi)^2 = 0,$$

например

$$s = m\xi + \eta,$$

где

$$m = \frac{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1E_1}}{2E_1}.$$

Тогда $t = -\xi + m\eta$ и для коэффициентов получим следующие формулы:

$$E_2 = 0, \quad B_2 = D_2 = (s_\xi^2 + 1)^2 \sqrt{B_1^2 - 4A_1E_1} > 0, \quad A_2 = C_2.$$

Тогда уравнение (1.59) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} + c \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) (u_{ss} + u_{tt}) = \Phi,$$

где $c = \frac{A_2}{B_2}, \quad \Phi = \frac{F_2}{B_2}.$

З а м е ч а н и е 1.7. Если $\beta^2 = (\alpha - \ell_1)(\alpha - \ell_2)$, то уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (u_{ss} + u_{tt}) = \Phi.$$

П р и м е р 1.9. Рассмотрим уравнение

$$u_{xxxx} + 5u_{xxxu} + 10u_{xxuy} + 10u_{xyuy} + 4u_{uyuy} = 0.$$

Так как $p = \frac{5}{8}, \quad q = -\frac{5}{8}, \quad r = -\frac{51}{256}$, то $\Delta < 0$. Следовательно, характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 10\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0$$

имеет два различных действительных и два комплексно - сопряженных корня:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_{3,4} = 1 \pm i.$$

Тогда, введя замену $\xi = x - y, \quad \eta = x$, уравнение можно привести к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = 0.$$

§ 1.5. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИ- ЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное уравнение четвертого порядка

$$\begin{aligned} & Au_{xxxx} + Bu_{xxxy} + Cu_{xxyy} + Du_{xyyy} + Eu_{yyyy} + Gu_{xxx} + Hu_{xxy} + \\ & + Ku_{xyy} + Lu_{yyx} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y + Ru = F. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Как и в § 1.1, введя замену переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$,

допускающую обратное преобразование, получаем новое уравнение, эквивалентное исходному

$$\begin{aligned} & A_1 u_{\xi\xi\xi\xi} + B_1 u_{\xi\xi\xi\eta} + C_1 u_{\xi\xi\eta\eta} + D_1 u_{\xi\eta\eta\eta} + E_1 u_{\eta\eta\eta\eta} + G_1 u_{\xi\xi\xi} + H_1 u_{\xi\xi\eta} + \\ & + K_1 u_{\xi\eta\eta} + L_1 u_{\eta\eta\eta} + M_1 u_{\xi\xi} + N_1 u_{\xi\eta} + T_1 u_{\eta\eta} + P_1 u_{\xi} + Q_1 u_{\eta} + R_1 u = F_1, \end{aligned} \quad (1.64)$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 определяются по формулам (1.3), а для остальных коэффициентов получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} G_1 &= 6A\xi_x^2\xi_{xx} + 3B(\xi_x^2\xi_{xy} + \xi_x\xi_{xx}\xi_y) + \\ &+ C(\xi_x^2\xi_{yy} + 4\xi_x\xi_{xy}\xi_y + \xi_{xx}\xi_y^2) + D(\xi_{xy}\xi_y^2 + \xi_x\xi_y\xi_{yy}) + \\ &+ 6E\xi_y^2\xi_{yy} + G\xi_x^3 + H\xi_x^2\xi_y + K\xi_x\xi_y^2 + L\xi_y^3, \\ H_1 &= A(12\xi_x\xi_{xx}\eta_x + 6\xi_x^2\eta_{xx}) + 3B(2\xi_x\xi_{xy}\eta_x + \xi_x^2\eta_{xy} + \xi_x\xi_{xx}\eta_y + \\ &+ \xi_{xx}\xi_y\eta_x + \xi_x\xi_y\eta_{xx}) + C(4\xi_x\xi_{xy}\eta_y + \xi_x^2\eta_{yy} + 4\xi_{xy}\xi_y\eta_x + \\ &+ 2\xi_x\xi_{yy}\eta_x + 4\xi_x\xi_y\eta_{xy} + 2\xi_{xx}\xi_y\eta_y + \xi_y^2\eta_{xx}) + D(6\xi_{xy}\xi_y\eta_y + \\ &+ 3\xi_x\xi_{yy}\eta_y + 3\xi_x\xi_y\eta_{yy} + 3\xi_y\xi_{yy}\eta_x + 3\xi_y^2\eta_{xy}) + E(6\xi_y^2\eta_{yy} + \\ &+ 12\xi_y\xi_{yy}\eta_y) + 3G\xi_x^2\eta_x + H(\xi_x^2\eta_y + 2\xi_x\xi_y\eta_x) + \\ &+ K(2\xi_x\xi_y\eta_y + \xi_y^2\eta_x) + 3L\xi_y^2\eta_y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_I = & A(6\xi_{xx}\eta_x^2 + 12\xi_x\eta_x\eta_{xx}) + 3B(\xi_{xy}\eta_x^2 + 2\xi_x\eta_x\eta_{xy} + \\
& + \xi_{xx}\eta_x\eta_y + \xi_x\eta_{xx}\eta_y + \xi_y\eta_x\eta_{xx}) + C(4\xi_{xy}\eta_x\eta_y + \\
& + 4\xi_x\eta_{xy}\eta_y + 2\xi_x\eta_x\eta_{yy} + \xi_{yy}\eta_x^2 + 4\xi_y\eta_x\eta_{xy} + \xi_{xx}\eta_y^2 + 2\xi_y\eta_{xx}\eta_y) + \\
& + D(3\xi_{xy}\eta_y^2 + 3\xi_x\eta_y\eta_{yy} + 3\xi_{yy}\eta_x\eta_y + 6\xi_y\eta_{xy}\eta_y + 3\xi_y\eta_x\eta_{yy}) + \\
& + E(6\xi_{yy}\eta_y^2 + 12\xi_y\eta_y\eta_{yy}) + 3G\xi_x\eta_x^2 + H(2\xi_x\eta_x\eta_y + \xi_y\eta_x^2) + \\
& + K(\xi_x\eta_y^2 + 2\xi_y\eta_x\eta_y) + 3L\xi_y\eta_y^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_I = & 6A\eta_x^2\eta_{xx} + 3B(\eta_x^2\eta_{xy} + \eta_x\eta_{xx}\eta_y) + C(\eta_x^2\eta_{yy} + 4\eta_x\eta_{xy}\eta_y + \\
& + \eta_{xx}\eta_x^2) + D(3\eta_{xy}\eta_y^2 + 3\eta_x\eta_y\eta_{yy}) + 6E\eta_y^2\eta_{yy} + G\eta_x^3 + H\eta_x^2\eta_y + \\
& + K\eta_x\eta_y^2 + L\eta_x^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_I = & A(3\xi_{xx}^2 + 4\xi_x\xi_{xxx}) + B(3\xi_{xy}\xi_{xx} + 3\xi_x\xi_{xxy} + \xi_{xxx}\xi_y) + \\
& + C(2\xi_{xy}^2 + 2\xi_x\xi_{xyy} + 2\xi_{xxy}\xi_y + \xi_{xx}\xi_{yy}) + D(3\xi_{xyy}\xi_y + \\
& + 3\xi_{xy}\xi_{yy} + \xi_x\xi_{yyy}) + E(3\xi_{yy}^2 + 4\xi_y\xi_{yyy}) + 3G\xi_x\xi_{xx} + \\
& + H(2\xi_x\xi_{xy} + \xi_{xx}\xi_y) + K(2\xi_{xy}\xi_y + \xi_x\xi_{yy}) + 3L\xi_y\xi_{yy} + \\
& + M\xi_x^2 + N\xi_x\xi_y + T\xi_y^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_I = & A(4\xi_{xxx}\eta_x + 6\xi_{xx}\eta_{xx} + 4\xi_x\eta_{xxx}) + B(3\xi_{xxy}\eta_x + 3\xi_{xx}\eta_{xy} + \\
& + 3\xi_{xy}\eta_{xx} + 3\xi_x\eta_{xy} + \xi_{xxx}\eta_y + \xi_y\eta_{xxx}) + C(2\xi_{xyy}\eta_x + 4\xi_{xy}\eta_{xy} + \\
& + 2\xi_x\eta_{xyy} + 2\xi_{xxy}\eta_y + \xi_{xx}\eta_{yy} + \xi_{yy}\eta_{xx} + 2\xi_y\eta_{xxy}) + D(3\xi_{xyy}\eta_y + \\
& + 3\xi_{xy}\eta_{yy} + \xi_x\eta_{yyy} + \xi_{yyy}\eta_x + 3\xi_{yy}\eta_{xy} + 3\xi_y\eta_{xyy}) + E(4\xi_{yyy}\eta_y + \\
& + 6\xi_{yy}\eta_{yy} + 4\xi_y\eta_{yyy}) + 3G(\xi_{xx}\eta_x + \xi_x\eta_{xx}) + H(2\xi_{xy}\eta_x + 2\xi_x\eta_{xy} + \\
& + \xi_{xx}\eta_y + \xi_y\eta_{xx}) + K(2\xi_{xy}\eta_y + \xi_x\eta_{yy} + \xi_{yy}\eta_x + 2\xi_y\eta_{xy}) + \\
& + 3L(\xi_{yy}\eta_y + \xi_y\eta_{yy}) + 2M\xi_x\eta_x + N(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2T\xi_y\eta_y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_I = & A(3\eta_{xx}^2 + 4\eta_x\eta_{xxx}) + B(3\eta_{xy}\eta_{xx} + 3\eta_x\eta_{xxy} + \eta_{xxx}\eta_y) + \\
 & + C(2\eta_{xy}^2 + 2\eta_x\eta_{xyy} + 2\eta_{xxy}\eta_y + \eta_{xx}\eta_{yy}) + D(3\eta_{xy}\eta_y + \\
 & + 3\eta_{xy}\eta_{yy} + \eta_x\eta_{yyy}) + E(3\eta_{yy}^2 + 4\eta_y\eta_{yyy}) + 3G\eta_x\eta_{xx} + \\
 & + H(2\eta_x\eta_{xy} + \eta_{xx}\eta_y) + K(2\eta_{xy}\eta_y + \eta_x\eta_{yy}) + 3L\eta_y\eta_{yy} + \\
 & + M\eta_x^2 + N\eta_x\eta_y + 4T\eta_y^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P = & A\xi_{xxxx} + B\xi_{xxxy} + C\xi_{xxyy} + D\xi_{xyyy} + E\xi_{yyyy} + G\xi_{xxx} + H\xi_{xxy} + K\xi_{xyy} + \\
 & + L\xi_{yyy} + M\xi_{xx} + N\xi_{xy} + T\xi_{yy} + P\xi_x + Q\xi_y,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q = & A\eta_{xxxx} + B\eta_{xxxy} + C\eta_{xxyy} + D\eta_{xyyy} + E\eta_{yyyy} + G\eta_{xxx} + H\eta_{xxy} + K\eta_{xyy} + \\
 & + L\eta_{yyy} + M\eta_{xx} + N\eta_{xy} + T\eta_{yy} + P\eta_x + Q\eta_y,
 \end{aligned}$$

$$R_1 = R.$$

Анализ структуры коэффициентов уравнения (1.64) позволяет сделать вывод о том, что канонические виды уравнения (1.63) зависят от классификации корней уравнений

$$A\lambda^4 - B\lambda^3 + C\lambda^2 - D\lambda + E = 0, \quad (1.65)$$

$$G\mu^3 - H\mu^2 + K\mu - L = 0, \quad (1.66)$$

$$M\nu^2 - N\nu + T = 0. \quad (1.67)$$

то есть, от условий:

$$I. 1) \quad a) \Delta = 0, p = 0, r = 0; \quad \bar{a}) \Delta = 0, p < 0, p^2 + 12r = 0;$$

$$b) \Delta = 0, p < 0, q = 0, r > 0; \quad \bar{b}) \Delta = 0, p > 0, q = 0, r > 0;$$

$$c) \Delta = 0, p < 0, -p^2 < 12r < 3p^2; \quad \bar{c}) \Delta = 0, p > -2\sqrt{r}, r \geq 0;$$

$$2) \quad \Delta > 0, p < 0, -p^2 < 12r < 3p^2;$$

$$3) \quad \Delta > 0, p > -2\sqrt{r}, r > 0, p \neq 2\sqrt{r}; \quad 4) \quad \Delta < 0;$$

$$II. 1) \quad a) \Delta^* = 0, H^2 - 3GK = 0;$$

$$b) \Delta^* = 0, H^2 \neq 3GK;$$

$$2) \Delta^* > 0;$$

$$3) \Delta < 0;$$

$$III. 1) \Delta^{**} = 0;$$

$$2) \Delta^{**} > 0;$$

$$3) \Delta^{**} < 0;$$

где p, q, r и Δ определены по формулам (1.9) и (1.10), а

$$\Delta^* = \frac{1}{3} [4(H^2 - 3GK)(K^2 - 3HL) - (HK - 9GL)^2], \quad \Delta^{**} = N^2 - 4MT.$$

Здесь $\Delta, \Delta^*, \Delta^{**}$ - дискриминанты уравнений (1.65) - (1.67) соответственно.

Отсюда следует, что логически возможны 108 случаев; их можно записать в виде (i, j, k) , где i, j, k принимают следующие значения соответственно: $\{1a, 1b, 1v, 1z, 1d, 1e, 2, 3, 4\}, \{1a, 1b, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

В каждом из 108 случаев возможны под случаи.

Пусть коэффициенты уравнения (1.63) постоянны. Тогда возможно дальнейшее упрощение уравнения (1.64). Например, в случае $(i, 1a, 1)$, где $i \in \{1a, 1b, 1v, 1z, 1d, 1e, 2, 3, 4\}$, введя замену $\xi = \alpha x + \beta y, \eta = \gamma x + \delta y, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, можно получить следующие канонические виды уравнения (1.63):

$$u_{xxxx} + u_{yyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi,$$

$$u_{xxxx} + u_{xyy} + Lu_{yyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi,$$

$$u_{xxxx} + u_{xxy} + Ku_{xyy} + Lu_{yyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi,$$

$$u_{xxxx} + u_{xxy} + Lu_{yyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi,$$

$$u_{xxyy} + u_{xxx} + Lu_{yyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (u_{xx} + u_{yy}) + Hu_{xxy} + Ku_{xyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} +$$

$$+ Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{xx} - u_{yy}) + Ku_{xyy} + Lu_{yyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + \\ + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{xx} + u_{yy}) + Ku_{xyy} + Lu_{yyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + \\ + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (u_{xx} - u_{yy}) + Ku_{xyy} + Lu_{yyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + \\ + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (u_{xx} + u_{yy}) + Hu_{xxy} + Ku_{xyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + \\ + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (u_{xx} + u_{yy}) + Ku_{xyy} + Lu_{yyy} + Mu_{xx} + Nu_{xy} + \\ + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y + Ru = \Phi. \end{aligned}$$

ГЛАВА II. ФУНКЦИЯ РИМАНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА И ЕЕ СВОЙСТВА

Как известно, в теории и приложениях гиперболических и эллиптических уравнений на плоскости фундаментальную роль играет функция Римана [8, 14, 65]. В последние годы возрастает интерес к построению функции Римана для уравнений высокого порядка и исследованию краевых задач для таких уравнений [145, 146]. В работе [68] изучены экспоненциальные и экстремальные свойства функции Римана для общего линейного гиперболического уравнения второго порядка. Однако, для уравнения выше третьего порядка качественные свойства функции Римана мало изучены.

В настоящей главе исследуются некоторые свойства функции Римана для линейного гиперболического уравнения с частными производными четвертого порядка.

§ 2.1. ФУНКЦИЯ РИМАНА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

В области $D_1 = \{(x, y) : 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$ рассмотрим линейное гиперболическое уравнение четвертого порядка

$$\begin{aligned} L_1(u) \equiv & u_{xxyy} + a_1(x, y)u_{xxy} + a_2(x, y)u_{xyy} + b_1(x, y)u_{xx} + b_2(x, y)u_{xy} + \\ & + b_3(x, y)u_{yy} + c_1(x, y)u_x + c_2(x, y)u_y + d(x, y)u = f_1(x, y), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $a_i, c_i (i = 1, 2), b_j (j = 1, 3), d, f_1$ – заданные функции.

Задача 2.1. (Задача Гурса) Требуется найти в области D_1 решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ u(x, 0) &= \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \end{aligned} \quad (2.2)$$

причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2(0) = \psi'_1(0), \quad \varphi'_1(0) = \psi_2(0), \quad \varphi'_2(0) = \psi'_2(0),$$

Сведением задача Гурса (2.1)-(2.2) к эквивалентному интегральному уравнению, нетрудно показать её разрешимость в классе M , где

$$M = \{u(x, y) : u(x, y) \in C^2(\overline{D_1}); u_{xxy}, u_{xyy}, u_{xxyy} \in C(D_1)\}.$$

Теорема 2.1. Если функции $a_i, c_i (i=1,2), b_j (j=1,2,3)$,

$$d, f_1 \in C(\overline{D_1}), \quad \varphi_i \in C^2[0, h] (i=1,2); \quad \psi_i \in C^2[0, \ell] (i=1,2),$$

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2(0) = \psi'_1(0), \quad \varphi'_1(0) = \psi_2(0), \quad \varphi'_2(0) = \psi'_2(0),$$

то решение задачи Гурса (2.1)-(2.2) в классе M существует, единственно и непрерывно зависит от данных $f_1, \varphi_i, \psi_i (i=1,2)$.

Пусть коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a_i, c_i (i=1,2), b_j (j=1,3), d, a_{1xxy}, a_{2xyy}, \\ b_{1xx}, b_{2xy}, b_{3yy}, c_{1x}, c_{2y} \in C(\overline{D_1}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда определен формально сопряженный оператор L_1^* и имеет место тождество

$$\mathcal{G}L_1(u) - uL_1^*(\mathcal{G}) = \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}, \quad (2.4)$$

Где

$$\begin{aligned} L_1^*(\mathcal{G}) &\equiv \mathcal{G}_{\eta\eta\xi\xi} - (a_1\mathcal{G})_{\eta\xi\xi} - (a_2\mathcal{G})_{\eta\eta\xi} + (b_1\mathcal{G})_{\xi\xi} + \\ &+ (b_2\mathcal{G})_{\eta\xi} + (b_3\mathcal{G})_{\eta\eta} - (c_1\mathcal{G})_{\xi} - (c_2\mathcal{G})_{\eta} + d\mathcal{G}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &= \vartheta_{\eta} u_{\xi\xi} + (a_2 \vartheta)_{\eta} u_{\xi} + (b_3 \vartheta)_{\eta} u - \\
 &\quad - [u_{\xi\xi\eta} + a_1 u_{\xi\xi} + a_2 u_{\xi\eta} + b_2 u_{\xi} + b_3 u_{\eta} + c_2 u] \vartheta, \\
 Q &= [\vartheta_{\eta\eta} - (a_1 \vartheta)_{\eta} + b_1 \vartheta] u_{\xi} - \\
 &\quad - [\vartheta_{\eta\eta\xi} - (a_1 \vartheta)_{\eta\xi} - (a_2 \vartheta)_{\eta\eta} + (b_1 \vartheta)_{\xi} + (b_2 \vartheta)_{\eta} - c_1 \vartheta] u.
 \end{aligned}$$

Пусть $\bar{\Omega}$ – замкнутая ограниченная область с кусочно-гладкой границей S . Тогда для любых функций u и ϑ класса M в силу тождества (2.4) справедливо равенство

$$\iint_{\Omega} [\vartheta L_1(u) - u L_1^*(\vartheta)] d\xi d\eta = \int_L P d\xi + Q d\eta. \quad (2.5)$$

Функцией Римана оператора L_1 называется функция $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$, удовлетворяющая условиям:

- 1) функция $\vartheta(x, y; \xi, \eta) \in M$ по совокупности переменных $(x, y; \xi, \eta)$ на $\bar{D}_1 \times \bar{D}_1$;
- 2) при каждой $(x, y) \in D_1$ функция $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$, удовлетворяет уравнению

$$L_{1(\xi, \eta)}^*(\vartheta(x, y; \xi, \eta)) = 0, \quad (\xi, \eta) \in D_1, \quad (2.6)$$

- 3) и условиям на характеристиках $\xi = x$ и $\eta = y$ (см. рис. 5):

$$\begin{aligned}
 \vartheta(x, y; x, \eta) &= 0, \quad \vartheta_{\xi}(x, y; x, \eta) = \omega_1(\eta; x, y), \quad 0 \leq \eta \leq y; \\
 \vartheta(x, y; \xi, y) &= 0, \quad \vartheta_{\eta}(x, y; \xi, y) = \omega_2(\xi; x, y), \quad 0 \leq \xi \leq y;
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\omega_1(\eta; x, y)$ и $\omega_2(\xi; x, y)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно:

$$\begin{cases} \vartheta_{\xi\eta\eta}(x, y; x, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} [a_1(x, \eta) \vartheta_{\xi}(x, y; x, \eta)] + b_1(x, \eta) \vartheta_{\xi}(x, y; x, \eta) = 0, \\ \vartheta_{\xi}(x, y; x, \eta) \Big|_{\eta=y} = 0, \quad \vartheta_{\xi\eta}(x, y; x, \eta) \Big|_{\eta=y} = 1, \quad 0 \leq \eta \leq y, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \vartheta_{\eta\xi\xi}(x, y; \xi, y) - \frac{\partial}{\partial \xi} [a_2(\xi, y)\vartheta_{\eta}(x, y; \xi, y)] + b_3(\xi, y)\vartheta_{\eta}(x, y; \xi, y) = 0, \\ \vartheta_{\eta}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad \vartheta_{\eta\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1, \quad 0 \leq \xi \leq x. \end{cases} \quad (2.9)$$

Очевидно, что задачи (2.8) и (2.9) однозначно разрешимы.

В соответствии с этим определением функция Римана $\vartheta^*(\xi, \eta; x, y)$ оператора L_1^* , принадлежит классу $\mathbf{M}$, удовлетворяет в области D_1 уравнению $L_{I(x, y)}(\vartheta^*) = 0$ и условиям на характеристиках

$$\vartheta^*(\xi, \eta; x, y)|_{x=\xi} = 0, \quad \vartheta_x^*(\xi, \eta; x, y)|_{x=\xi} = \omega_1^*(y; \xi, \eta),$$

$$\vartheta^*(\xi, \eta; x, y)|_{y=\eta} = 0, \quad \vartheta_y^*(\xi, \eta; x, y)|_{y=\eta} = \omega_2^*(x; \xi, \eta),$$

где $\omega_1^*(y; \xi, \eta)$ и $\omega_2^*(x; \xi, \eta)$ - являются решениями следующих задач Коши соответственно:

$$\vartheta_{xy}^*(\xi, \eta; \xi, y) + a_1(\xi, y)\vartheta_{xy}^*(\xi, \eta; \xi, y) + b_1(\xi, y)\vartheta_x^*(\xi, \eta; \xi, y) = 0,$$

$$\vartheta_x^*(\xi, \eta; \xi, y)|_{y=\eta} = 0, \quad \vartheta_{xy}^*(\xi, \eta; \xi, y)|_{y=\eta} = 1;$$

$$\vartheta_{yx}^*(\xi, \eta; x, \eta) + a_2(x, \eta)\vartheta_{yx}^*(\xi, \eta; x, \eta) + b_3(x, \eta)\vartheta_y^*(\xi, \eta; x, \eta) = 0,$$

$$\vartheta_x^*(\xi, \eta; x, \eta)|_{x=\xi} = 0, \quad \vartheta_{xy}^*(\xi, \eta; x, \eta)|_{x=\xi} = 1.$$

Имеет место

Т е о р е м а 2.2. *Если коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют условиям (2.3), то функция Римана $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ существует, единственна и справедливо равенство*

$$\vartheta(x, y; \xi, \eta) = \vartheta^*(\xi, \eta; x, y), \quad (2.10)$$

где $\vartheta^*(\xi, \eta; x, y)$ - функция Римана оператора L_1^* .

Существование и единственность функции Римана непосредственно следует из теоремы 2.1. Доказательство равенства (2.10) следует из (2.5), если $\Omega = \{(\xi, \eta) : \alpha < \xi < x, \beta < \eta < y\}$.

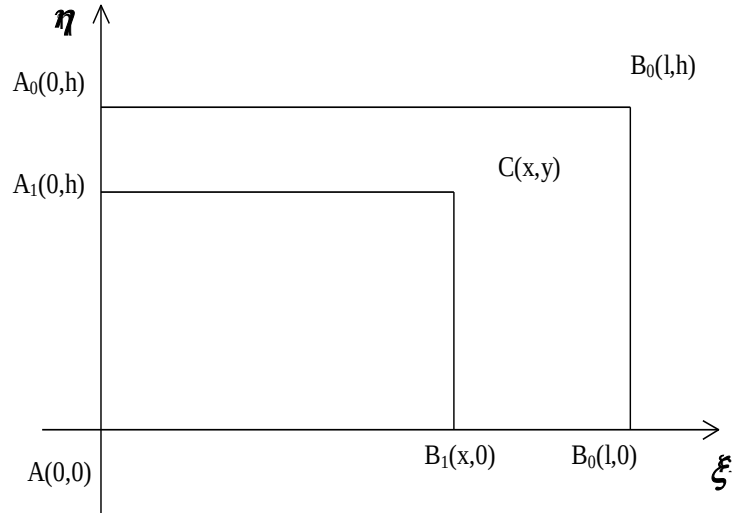


Рис. 5.

Пример 2.1. Функция Римана для уравнения

$$u_{xxyy} + cu = 0, \quad c = \text{const}$$

имеет вид

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^n}{[(2n+1)!]^2} (\xi - x)^{2n+1} (\eta - y)^{2n+1}.$$

Пример 2.2. Функция Римана для уравнения

$$u_{xxyy} - u_{yy} + u_{xx} = 0$$

имеет вид

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} C_n^k \frac{(\xi - x)^{2k+1} (\eta - y)^{2(n-k)+1}}{(2k+1)! [2(n-k)+1]!}.$$

Отметим, что это уравнение описывает движение идеальной несжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости [24]. В этой же работе рассмотрены основные краевые задачи для этого уравнения.

С помощью функции Римана $\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)$, нетрудно получить представление общего решения уравнения (2.1) в прямоугольных областях. В самом деле, осуществляя интегрирование в (2.5) по области $\Omega = \{(\xi, \eta) : \alpha < \xi < x, \beta < \eta < y\}$, где (x, y) – произвольная точка области D_I , имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) = & A_I(x, y)u(0, y) - \mathfrak{G}_\eta(x, y; 0; y)u_x(0, y) + \\ & + \int_0^y [B_I(x, y; \eta)u_\xi(0, y) - C_I(x, y; \eta)u(0, \eta)]d\eta + \int_0^x [\mathfrak{G}(x, y; \xi, 0)u_{\eta\xi\xi}(\xi, 0) - \\ & - D_I(x, y; \xi)u_{\xi\xi}(\xi, 0) + a_2(\xi, 0)\mathfrak{G}(x, y; \xi, 0)u_{\eta\xi}(\xi, 0) - E_I(x, y; \xi)u_\xi(\xi, 0) + \\ & + b_3(\xi, 0)\mathfrak{G}(x, y; \xi, 0)u_\eta(\xi, 0) - F_I(x, y; \xi)u(\xi, 0)]d\xi + \\ & + \int_0^x d\xi \int_0^y \mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)f_1(\xi, \eta)d\eta, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} A_I(x, y) = & \mathfrak{G}_{\eta\xi}(x, y; 0, y) - a_2(0, y)\mathfrak{G}_\eta(x, y; 0, y), \\ B_I(x, y; \eta) = & \mathfrak{G}_{\eta\eta}(x, y; 0, \eta) - a_1(0, \eta)\mathfrak{G}_\eta(x, y; 0, \eta) + \\ & + [b_1(0, \eta) - a_{I\eta}(0, \eta)]\mathfrak{G}(x, y; 0, \eta), \\ C_I(x, y; \eta) = & \mathfrak{G}_{\xi\eta\eta}(x, y; 0, \eta) - a_1(0, \eta)\mathfrak{G}_{\xi\eta}(x, y; 0, \eta) - \\ & - a_2(0, \eta)\mathfrak{G}_{\eta\eta}(x, y; 0, \eta) + [b_1(0, \eta) - a_{I\eta}(0, \eta)]\mathfrak{G}_\xi(x, y; 0, \eta) + \\ & + [b_2(0, \eta) - a_{I\xi}(0, \eta) - 2a_{2\eta}(0, \eta)]\mathfrak{G}_\eta(x, y; 0, \eta) + \\ & + [b_{I\xi}(0, \eta) - a_{I\xi\eta}(0, \eta) - a_{2\eta\eta}(0, \eta) + b_{2\eta}(0, \eta) - c_1(0, \eta)]\mathfrak{G}(x, y; 0, \eta), \\ D_I(x, y; \xi) = & \mathfrak{G}_\eta(x, y; \xi, 0) - a_1(\xi, 0)\mathfrak{G}(x, y; \xi, 0), \\ E_I(x, y; \xi) = & a_2(\xi, 0)\mathfrak{G}_\eta(x, y; \xi, 0) + [a_{2\eta}(\xi, 0) - b_2(\xi, 0)]\mathfrak{G}(x, y; \xi, 0), \\ F_I(x, y; \xi) = & b_3(\xi, 0)\mathfrak{G}_\eta(x, y; \xi, 0) + [b_{3\eta}(\xi, 0) - c_2(\xi, 0)]\mathfrak{G}(x, y; \xi, 0), \end{aligned}$$

Формулу (2.11) можно рассматривать как представление общего решения уравнения (2.1), если считать, что функции $u(0, y)$, $u_x(0, y)$,

$u(x, 0), u_y(x, 0)$ - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Если учесть условия (2.2), то из (2.11) получаем представление решения задачи Гурса:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & A_1(x, y)\varphi_1(y) - \vartheta_\eta(x, y; 0; y)\varphi_2(y) + \\ & + \int_0^y [B_1(x, y; \eta)\varphi_2(\eta) - C_1(x, y; \eta)\varphi_1(\eta)]d\eta + \int_0^x [\vartheta(x, y; \xi, 0)\psi_2''(\xi) - \\ & - D_1(x, y; \xi)\psi_1''(\xi) + a_2(\xi, 0)\vartheta(x, y; \xi, 0)\psi_2'(\xi) - E_1(x, y; \xi)\psi_1'(\xi) + \\ & + b_3(\xi, 0)\vartheta(x, y; \xi, 0)\psi_2(\xi) - F_1(x, y; \xi)\psi_1(\xi)]d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta(x, y; \xi, \eta)f_1(\xi, \eta)d\eta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Аналогично можно получить представление решения задачи Гурса для уравнения (2.1), когда граничные данные задаются на других участках области. Например, если вместо первых двух условий (2.2) заданы условия

$$u(\ell, y) = \varphi_3(y), \quad u_x(\ell, y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

то решение задачи Гурса имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) = & A_2(x, y)\varphi_3(y) - w_\eta(x, y; \ell, y)\varphi_4(y) + \int_0^y [B_2(x, y; \eta)\varphi_4(\eta) - \\ & - C_2(x, y; \eta)\varphi_3(\eta)]d\eta + \int_x^\ell [D_2(x, y; \xi)\psi_1''(\xi) - w(x, y; \xi, 0)\psi_2''(\xi) + \\ & + E_2(x, y; \xi)\psi_1'(\xi) - a_2(\xi, 0)w(x, y; \xi, 0)\psi_2'(\xi) + F_2(x, y; \xi)\psi_1(\xi) - \\ & - b_3(\xi, 0)w(x, y; \xi, 0)\psi_2(\xi)]d\xi - \int_x^\ell d\xi \int_0^y w(x, y; \xi, \eta)f_1(\xi, \eta)d\eta, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $w(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана, определяемая как решение задачи Гурса

$$L_1^*(w) = 0,$$

$$w(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = 0, \quad w_\xi(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = \omega_3(\eta; x, y);$$

$$w(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = 0, \quad w_\eta(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = \omega_4(\xi; x, y);$$

$\omega_3(\eta; x, y)$ и $\omega_4(\xi; x, y)$ - являются решениями следующих задач

Коши соответственно:

$$\begin{cases} w_{\xi\eta\eta}(x, y; x, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} [a_1(x, \eta)w_\xi(x, y; x, \eta)] + b_1(x, \eta)w_\xi(x, y; x, \eta) = 0, \\ w_\xi(x, y; x, \eta)|_{\eta=y} = 0, \quad w_{\xi\eta}(x, y; x, \eta)|_{\eta=y} = 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} w_{\eta\xi\xi}(x, y; \xi, y) - \frac{\partial}{\partial \xi} [a_2(\xi, y)w_\eta(x, y; \xi, y)] + b_3(\xi, y)w_\eta(x, y; \xi, y) = 0, \\ w_\eta(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad w_{\eta\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1; \end{cases} \quad (2.15)$$

а $A_2(x, y), B_2(x, y; \eta), C_2(x, y; \eta), D_2(x, y; \xi), E_2(x, y; \xi), F_2(x, y; \xi)$

известные функции, выражающиеся через $w(x, y; \xi, \eta)$ и коэффициенты уравнения (2.1).

§ 2.2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РИМАНА

Л е м м а 2.1. *Если*

$$\forall (x, y) \in \overline{D}_1 : b_3(x, y) - a_{2x}(x, y) \leq 0, \quad (2.16)$$

то функции $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ и $w(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяют неравенствам:

$$\forall \xi \in [0, \ell) : \vartheta_\eta(\ell, y; \xi, y) < 0, \quad \vartheta_{\eta\xi}(\ell, y; \xi, y) > 1; \quad (2.17)$$

$$\forall \xi \in (0, \ell] : w_\eta(0, y; \xi, y) > 0, \quad w_{\eta\xi}(0, y; \xi, y) > 1. \quad (2.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу (2.9):

$$\begin{aligned} & \vartheta_{\eta\xi\xi}(x, y; \xi, y) - a_2(\xi, y)\vartheta_{\eta\xi}(x, y; \xi, y) + \\ & + [b_3(\xi, y) - a_{2\xi}(\xi, y)]\vartheta_\eta(x, y; \xi, y) = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\vartheta_\eta(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad \vartheta_{\eta\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1; \quad 0 \leq \xi \leq x. \quad (2.20)$$

Пусть $\beta_2(\xi; x, y) = \exp\left[\int_{\xi}^x a_2(\xi_1, y)d\xi_1\right]$.

Тогда $\beta_{2\xi}(\xi; x, y) = -a_2(\xi, y)\beta_2(\xi; x, y)$.

Поэтому, уравнение (2.19) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} [\beta_2(\xi; x, y)\vartheta_{\eta\xi}(x, y; \xi, y)] + \\ & + \beta_2(\xi; x, y)[b_3(\xi, y) - a_{2\xi}(\xi, y)]\vartheta_\eta(x, y; \xi, y) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнения дважды по ξ в пределах от ξ до x , и учитывая (2.20), получим

$$\vartheta_\eta(x, y; \xi, y) = \Phi(x, y; \xi) + \int_x^\xi K(x, y; \xi, \xi_1)\vartheta_\eta(x, y; \xi_1, y)d\xi_1, \quad (2.21)$$

где

$$\Phi(x, y; \xi) = \int_x^\xi \beta_2^{-1}(\xi_1; x, y)d\xi_1, \quad K(x, y; \xi, \xi_1) =$$

$$= \beta_2(\xi_1; x, y) [b_3(\xi_1, y) - \alpha_{2\xi_1}(\xi_1, y)] \int_{\xi}^{\xi_1} \beta_2^{-1}(\xi_2; x, y) d\xi_2.$$

Уравнение (2.21) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и его обращение имеет вид

$$\vartheta_{\eta}(x, y; \xi, y) = \Phi(x, y; \xi) + \int_x^{\xi} R(x, y; \xi, \xi_1) \Phi(x, y; \xi_1) d\xi_1, \quad (2.22)$$

где $R(x, y; \xi, \xi_1)$ – резольвента ядра $K(x, y; \xi, \xi_1)$.

Так как $\forall (x, y) \in \bar{D}_I \wedge \forall \xi \in [0, \ell): \Phi(x, y; \xi_1) < 0$, то, в силу условия (2.16), из (2.22) непосредственно получаем первое неравенство (2.17). Дифференцируя уравнение (2.22) по ξ и, учитывая условие (2.16), убеждаемся в справедливости второго неравенства (2.17).

Доказательство неравенств (2.18) аналогично. Оно следует из (2.15).

Известно, что одним из качественных свойств функции Римана является свойство «взаимности» [8, 65]. В работе [68] для гиперболического уравнения второго порядка исследованы экспоненциальные и экстремальные свойства функции Римана.

Аналогичными свойствами обладают функция Римана для гиперболического уравнения четвертого порядка. Для простоты изложения, рассмотрим случай, когда $b_1(x, y) = 0$, $b_3(x, y) = 0$.

Л е м м а 2.2. *Частные производные первого порядка функции Римана по каждому ее аргументу выражаются через саму функцию Римана при тех же значениях ее аргументов по формулам*

$$\begin{aligned} \vartheta_{\xi}(x, y; \xi, \eta) &= a_2(\xi, \eta) \vartheta(x, y; \xi, \eta) + \\ &+ \beta_1(\xi, \eta; y) \int_y^{\eta} \beta_1^{-1}(\xi, t; y) [h_1(\xi, t) \vartheta(x, y; \xi, t) + \Phi_1(x, y; \xi, t)] dt; \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{\eta}(x, y; \xi, \eta) &= a_1(\xi, \eta) \vartheta(x, y; \xi, \eta) + \beta_2(\xi, \eta; x) \times \\ &\times \int_x^{\xi} \beta_2^{-1}(s, \eta; x) [h_2(s, \eta) \vartheta(x, y; s, \eta) + \Phi_1(x, y; s, \eta)] ds; \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_x(x, y; \xi, \eta) &= -a_2(x, y) \vartheta(x, y; \xi, \eta) + \\ &+ \int_{\xi}^x a_{2s}(s, y) \vartheta(s, y; \xi, \eta) ds + \int_{\eta}^y a_{2t}(x, t) \vartheta(x, t; \xi, \eta) + \Phi_2(x, t; \xi, \eta) dt - \\ &- \int_{\xi}^x ds \int_{\eta}^y a_{2st}(s, t) \vartheta(s, t; \xi, \eta) dt, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_y(x, y; \xi, \eta) &= -a_1(x, y) \vartheta(x, y; \xi, \eta) + \int_{\eta}^y a_{2t}(x, t) \vartheta(x, t; \xi, \eta) dt + \\ &+ \int_{\xi}^x [a_{1s}(s, y) \vartheta(s, y; \xi, \eta) + \Phi_3(s, y; \xi, \eta)] ds - \int_{\xi}^x ds \int_{\eta}^y a_{1st}(s, t) \vartheta(s, t; \xi, \eta) dt \end{aligned} \quad (2.26)$$

где

$$\beta_1(\xi, \eta; y) = \exp \left[\int_y^{\eta} a_1(\xi, t) dt \right], \quad \beta_2(\xi, \eta; x) = \exp \left[\int_x^{\xi} a_2(s, \eta) ds \right],$$

$$h_1(\xi, \eta) = a_{1\xi} + a_1 a_2 - b_2, \quad h_2(\xi, \eta) = a_{2\eta} + a_1 a_2 - b_2,$$

$$\Phi_1(x, y; \xi, \eta) = I + \int_x^{\xi} c_2(s, \eta) \vartheta(x, y; s, \eta) ds +$$

$$+ \int_y^{\eta} c_1(\xi, t) \vartheta(x, y; \xi, t) dt - \int_x^{\xi} ds \int_y^{\eta} d(s, t) \vartheta(x, y; s, t) dt,$$

$$\Phi_2(x, y; \xi, \eta) = \gamma_1^{-1}(x, y; \eta) \left[I + \int_{\eta}^y \{ \gamma_1(x, t; \eta) (b_2 - a_{1x} - a_{2t} - a_1 a_2) \} I_t - \right.$$

$$\left. - \gamma_1(x, t; \eta) c_1(x, t) \} \vartheta(x, t; \xi, \eta) dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi}^x ds \int_{\eta}^y \{ \gamma_1(x, t; \eta) a_{2s}(s, t) \} I_{tt} + [\gamma_1(x, t; \eta) (c_2 - b_{2s} + a_{1ss})] I_t - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma_1(x, t; \eta)(d - c_{1s})\} \vartheta(s, t; \xi, \eta) dt] - \\
 & - \int_{\xi}^x (c_2 - b_{2s} + a_{2s} + a_{1ss} + a_{2sy}) \vartheta(s, y; \xi, \eta) ds - \\
 & - (b_2 - a_{1x} - a_{2y} - a_1 a_2) \vartheta(x, y; \xi, \eta), \\
 & \Phi_3(x, y, \xi, \eta) = -(b_2 - a_{1x} - a_{2y} - a_1 a_2) \vartheta(x, y, \xi; \eta) - \\
 & - \int_{\eta}^y (c_1 - b_{2t} + a_{2t} + a_2 a_{1t} + a_{1xt}) \vartheta(x, t; \xi, \eta) dt + \gamma_2^{-1}(x, y; \xi) \times \\
 & \times [1 + \int_{\xi}^x \{[\gamma_2(s, y; \xi)(b_2 - a_{1s} - a_{2y} + a_1 a_2)]_s - \\
 & - \gamma_2(s, y; \xi) c_2(s, y)\} \vartheta(s, y; \xi, \eta) ds + \\
 & + \int_{\xi}^x ds \int_{\eta}^y \{[\gamma_2(s, y; \xi)(c_1 - b_{2t} - a_{2t})]_s - \gamma_2(s, y; \xi)(d - c_{2t}) + \\
 & + [\gamma_2(s, y; \xi) a_{1t}(s, t)]_{ss}\} \vartheta(s, t; \xi, \eta) dt, \\
 & \gamma_1(x, y; \eta) = \exp \left[\int_{\eta}^y a_1(x, t) dt \right], \quad \gamma_2(x, y; \xi) = \exp \left[\int_{\xi}^x a_2(s, y) ds \right].
 \end{aligned}$$

Остановимся, например, на доказательстве равенства (2.26). В силу свойства взаимности (2.10) функция $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению $L_{I(x, y)}(\vartheta(x, y; \xi, \eta)) = 0$. Интегрируя это уравнение по y в пределах от η до y и умножая полученное уравнение на $\gamma_2(x, y; \eta)$, имеем

$$\begin{aligned}
 & [\gamma_2(x, y; \xi) \vartheta_{xy}]_x + [\gamma_2(x, y; \xi) a_1 \vartheta_x]_x + \\
 & + \gamma_2(x, y; \xi) \{(b_2 - a_{1x} - a_{2y} - a_1 a_2) \vartheta_x + c_2 \vartheta + \\
 & + \int_{\eta}^y [(d - c_{2t}) \vartheta + (c_1 - b_{2t} + a_{2t}) \vartheta_x - a_{1t} \vartheta_{xx}] dt \} = 0.
 \end{aligned}$$

Теперь интегрируя это уравнение по x в пределах от ξ до x приходим

$$\vartheta_{xy} + a_I \vartheta_x - \int_{\eta}^y a_{It}(x, t) \vartheta_x(x, t; \xi, \eta) dt = \Phi_3(x, y; \xi, \eta).$$

Если еще раз интегрируем это уравнение по x в пределах от ξ до x , то получим формулу (2.26).

Остальные случаи доказываются аналогично.

Из леммы 2.2 непосредственно следует

Теорема 2.3. (Свойство «экспоненциальности» функции Римана).

Если в области D_1 коэффициенты уравнения (2.1)

$$a_i(x, y) \in C^{n+3}(D_1) (i=1, 2), \quad b_2(x, y) \in C^{n+2}(D_1),$$

$$c_i(x, y) \in C^{n+1}(D_1) (i=1, 2), \quad d(x, y) \in C^n(D_1),$$

то функция Римана $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ имеет по каждому аргументу непрерывные частные производные до $n+2$ -го порядка включительно, которые выражаются через саму функцию Римана с помощью конечного числа арифметических операций и операций интегрирования над ней и коэффициентами уравнения (2.1) и их частными производными указанных порядков.

Свойство экспоненциальности функции Римана позволяет, например, оценивать ее частные производные через оценку самой функции Римана.

Отметим, что функция Римана $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ является решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \vartheta(x, y; \xi, \eta) = & (\xi - x)(\eta - y) - \int_x^{\xi} A(\xi, \eta; s) \vartheta(x, y; s, \eta) ds - \\ & - \int_y^{\eta} B(\xi, \eta; t) \vartheta(x, y; \xi, t) dt - \int_x^{\xi} ds \int_y^{\eta} C(\xi, \eta; s, t) \vartheta(x, y; s, t) dt, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где

$$A(\xi, \eta; s) = a_2(s, \eta) + (\xi - s)b_3(s, \eta),$$

$$B(\xi, \eta; t) = a_1(\xi, t) + (\eta - t)b_1(\xi, t),$$

$$C(\xi, \eta; s, t) = b_2(s, t) - (\xi - s)c_2(s, t) - (\eta - t)c_1(s, t) + (\xi - s)(\eta - t)d(s, t).$$

Нетрудно заметить, что формулы (2.23)-(2.26) нельзя получить путем дифференцирования (2.27) с последующим интегрированием по частям получаемых интегралов.

Теперь с помощью экспоненциальных свойств функции Римана $\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)$, т.е. с помощью формул (2.23)-(2.26) непосредственно можно проверить, что функция (2.12) удовлетворяет краевым условиям (2.2) и уравнению (2.1).

1). Проверка выполнения условия $u(0, y) = \varphi_1(y)$, $0 \leq y \leq h$.

Прежде всего заметим, что

$$A_1(x, y) \equiv \mathfrak{G}_{\eta\xi}(x, y; 0, y) - a_2(0, y)\mathfrak{G}_\eta(x, y; 0, y) \equiv 1.$$

Это следует из формулы (2.24). В самом деле

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\eta\xi}(x, y; \xi, \eta) &= a_{1\xi}(\xi, \eta)\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta) + \\ &+ a_1(\xi, \eta)\mathfrak{G}_\xi(x, y; \xi, \eta) + h_2(\xi, \eta)\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta) + \\ &+ \Phi_1(x, y; \xi, \eta) + a_2(\xi, \eta)\beta(\xi, \eta; x) \times \\ &\times \int_x^\xi \beta_2(s, \eta; x)[h_2(s, \eta)\mathfrak{G}(x, y; s, \eta) + \Phi_1(x, y; s, \eta)]ds. \end{aligned}$$

Так как

$$\mathfrak{G}(x, y; \xi, y) = 0, \quad \Phi_1(x, y; \xi, y) = 1,$$

$$\mathfrak{G}_\eta(x, y; \xi, y) = \beta_2(\xi, y; x) \int_x^\xi \beta_2^{-1}(s, y; x)ds,$$

$$\text{то } \mathfrak{G}_{\eta\xi}(x, y; \xi, y) = a_2(\xi, y)\mathfrak{G}_\eta(x, y; \xi, y) + 1.$$

$$\text{Следовательно, } \mathfrak{G}_{\eta\xi}(x, y; 0, y) - a_2(0, y)\mathfrak{G}_\eta(x, y; 0, y) = 1.$$

Заметим, что $\mathfrak{G}_\eta(0, y; 0, y) = 0$, $\mathfrak{G}_{\eta\eta}(0, y; 0, y) = 0$. Тогда

$B_I(0, y; \eta) = 0$ и из (2.12) имеем

$$u(0, y) = \varphi_I(y) - \int_0^y C_I(0, y; \eta) \varphi_I(\eta) d\eta.$$

Так как $\mathfrak{G}_{\xi\eta\eta}(0, y; 0, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} [a_I(0, \eta) \mathfrak{G}_\xi(0, y; 0, \eta)] = 0$, то

$C_I(0, y; \eta) = 0$. Следовательно, $u(0, y) = \varphi_I(y)$.

2). Проверка выполнения условия $u(x, 0) = \psi_I(x)$, $0 \leq x \leq \ell$.

В силу того, что

$$\mathfrak{G}(x, 0; \xi, 0) = 0, \quad F_I(x, 0; \xi) = 0, \quad D_I(x, 0; \xi) = \mathfrak{G}_\eta(x, 0; \xi, 0),$$

$$E_I(x, 0; \xi) = a_2(\xi, 0) \mathfrak{G}_\eta(x, 0; \xi, 0)$$

из (2.12) имеем

$$u(x, 0) = \varphi_I(0) - \mathfrak{G}_\eta(x, 0; 0, 0) \varphi_2(0) - \int_0^x [\mathfrak{G}_\eta(x, 0; \xi, 0) \psi_I''(\xi) + a_2(\xi, 0) \mathfrak{G}_\eta(x, 0; \xi, 0) \psi_I'(\xi)] d\xi.$$

Далее, осуществляя интегрирование по частям, получим

$$u(x, 0) = \varphi_I(0) - \psi_I(0) - \mathfrak{G}_\eta(x, 0; 0, 0) [\varphi_2(0) - \psi_I(x)] - \int_0^x \{ \mathfrak{G}_{\eta\xi\xi}(x, 0; \xi, 0) - \frac{\partial}{\partial \xi} [a_2(\xi, 0) \mathfrak{G}_\eta(x, 0; \xi, 0)] \} \psi_I(\xi) d\xi = \psi_I(x),$$

Так как $\varphi_I(0) = \psi_I(0)$, $\varphi_2(0) = \psi_I'(0)$,

$$\mathfrak{G}_{\eta\xi\xi}(x, 0; \xi, 0) - \frac{\partial}{\partial \xi} [a_2(\xi, 0) \mathfrak{G}_\eta(x, 0; \xi, 0)] = 0.$$

3). Проверка выполнения условия $u_x(0, y) = \varphi_2(y)$, $0 \leq y \leq h$.

Очевидно, что

$$u_x(\theta, y) = -\mathfrak{G}_{\eta x}(\theta, y; \theta, y)\varphi_2(y) + \\ + \int_0^y [B_{Ix}(\theta, y; \eta)\varphi_2(\eta) - C_{Ix}(\theta, y; \eta)\varphi_1(\eta)]d\eta.$$

Непосредственным дифференцированием (2.24) находим

$$\mathfrak{G}_{\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) = a_I(\theta, \eta)\mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, \eta) - 1,$$

$$\mathfrak{G}_{\eta\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) = a_{I\eta}(\theta, \eta)\mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, \eta) + a_I(\theta, \eta)\mathfrak{G}_{x\eta}(\theta, y; \theta, \eta).$$

Тогда $\mathfrak{G}_{\eta x}(\theta, y; \theta, y) = -1$, $B_{Ix}(\theta, y; \eta) = 0$.

Докажем, что $C_{Ix}(\theta, y; \eta) = 0$. Для этого вычислим

$$\mathfrak{G}_{\xi\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) = a_2(\theta, \eta)\mathfrak{G}_{\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) + a_{2\eta}(\theta, \eta)\mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, \eta) + \\ + h_I(\theta, \eta)\mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, \eta) + \Phi_{Ix}(\theta, y; \theta, \eta) + \\ + a_I(\theta, \eta)\beta_I(\theta, \eta; y) \int_y^\eta \beta_I^{-1}(\theta, t; y) [h_I(\theta, t)\mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, t) + \Phi_{Ix}(\theta, y; \theta, t)]dt, \\ \mathfrak{G}_{\xi\eta\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) = a_2(\theta, \eta)\mathfrak{G}_{\eta\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) + \\ + [2a_{2\eta}(\theta, \eta) + h_I(\theta, \eta)]\mathfrak{G}_{\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) + \\ + [a_{2\eta\eta}(\theta, \eta) + h_{I\eta}(\theta, \eta)]\mathfrak{G}_{\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) + \\ + [a_{2\eta\eta}(\theta, \eta) + h_{I\eta}(\theta, \eta)]\mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, \eta) + \Phi_{I\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) + \\ + a_I(\theta, \eta)[h_I(\theta, \eta)\mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, \eta) + \Phi_{Ix}(\theta, y; \theta, \eta)] + \\ + [a_{I\eta}(\theta, \eta) + a_I^2(\theta, \eta)]\beta_I(\theta, \eta; y) \times \\ \times \int_y^\eta \beta_I^{-1}(\theta, t; y) [h_I(\theta, t)\mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, t) + \Phi_{Ix}(\theta, y; \theta, t)]dt.$$

Тогда

$$C_{Ix}(\theta, y; \eta) = \mathfrak{G}_{\xi\eta\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) - a_I(\theta, \eta)\mathfrak{G}_{\xi\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) - \\ - a_2(\theta, \eta)\mathfrak{G}_{\eta\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) -$$

$$\begin{aligned}
 & -a_{1\eta}(\theta, \eta) \mathfrak{G}_{\xi x}(\theta, y; \theta, \eta) + \\
 & + [b_2(\theta, \eta) - a_{1\xi}(\theta, \eta) - 2a_{2\xi}(\theta, \eta)] \mathfrak{G}_{\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) + \\
 & + [b_{2\eta}(\theta, y) - a_{1\xi\eta}(\theta, \eta) - a_{2\eta\eta}(\theta, \eta) - c_1(\theta, \eta)] \mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, \eta) = \\
 & = -c_1(\theta, \eta) \mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, \eta) + \Phi_{1\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) = 0,
 \end{aligned}$$

так как

$$\Phi_{1\eta x}(\theta, y; \theta, \eta) = c_1(\theta, \eta) \mathfrak{G}_x(\theta, y; \theta, \eta).$$

Итак, $u_x(\theta, y) = \varphi_2(y)$.

4). Проверка выполнения условия $u_y(x, \theta) = \psi_2(x)$, $\theta \leq x \leq \ell$.

Из (2.12) найдем

$$\begin{aligned}
 u_y(x, \theta) &= \varphi'_1(\theta) - [\mathfrak{G}_{\eta y}(x, \theta; \theta, \theta) + \mathfrak{G}_{\eta\eta}(x, \theta; \theta, \theta)] \varphi_2(\theta) - \\
 &- \mathfrak{G}_{\eta}(x, \theta; \theta, \theta) \varphi'_2(\theta) + B_1(x, \theta, \theta) \varphi_2(\theta) - C_1(x, \theta, \theta) \varphi_1(\theta) + \\
 &+ \int_0^x [\mathfrak{G}_y(x, \theta; \xi, \theta) \psi_2''(\xi) - D_{1y}(x, \theta; \xi) \psi_1''(\xi) + \\
 &+ a_2(\xi, \theta) \mathfrak{G}_y(x, \theta; \xi, \theta) \psi_2'(\xi) - E_{1y}(x, \theta; \xi) \psi_1'(\xi) - F_{1y}(x, \theta; \xi) \psi_1(\xi)] d\xi.
 \end{aligned}$$

Прежде всего непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$\mathfrak{G}_{y\xi\xi}(x, \theta; \xi, \theta) - \frac{\partial}{\partial \xi} [a_2(\xi, \theta) \mathfrak{G}_y(x, \theta; \xi, \theta)] = 0,$$

$$D_{1y\xi\xi}(x, \theta; \xi) - E_{1y\xi}(x, \theta; \xi) - F_{1y}(x, \theta; \xi) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 u_y(x, \theta) &= \varphi'_1(\theta) - [\mathfrak{G}_{\eta y}(x, \theta; \theta, \theta) + \mathfrak{G}_{\eta\eta}(x, \theta; \theta, \theta)] \varphi_2(\theta) - \\
 &- \mathfrak{G}_{\eta}(x, \theta; \theta, \theta) \varphi'_2(\theta) + B_1(x, \theta; \theta) \varphi_2(\theta) - C_1(x, \theta; \theta) \varphi_1(\theta) - \\
 &- \mathfrak{G}_y(x, \theta; \theta, \theta) \psi_2'(\theta) + \psi_2(x) + \mathfrak{G}_{y\xi}(x, \theta; \theta, \theta) \psi_2(\theta) - \\
 &- a_2(\theta, \theta) \mathfrak{G}_y(x, \theta; \theta, \theta) \psi_2(\theta) + D_{1y}(x, \theta; \theta) \psi_1'(\theta) - [D_{1y\xi}(x, \theta; \theta) - \\
 &- E_1(x, \theta; \theta)] \psi_1(\theta) = \psi_2(x) + [1 + \mathfrak{G}_{y\xi}(x, \theta; \theta, \theta) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -a_2(0,0)\mathfrak{G}_y(x,0;0,0)]\psi_2(0) + [B_1(x,0;0) + D_{1y}(x,0;0) - \\
 & \mathfrak{G}_{\eta y}(x,0;0,0) - \mathfrak{G}_{\eta\eta}(x,0;0,0)]\varphi_2(0) - [\mathfrak{G}_\eta(x,0;0,0) + \\
 & + \mathfrak{G}_y(x,0;0,0)]\varphi'_2(0) - [D_{1y\xi}(x,0;0) - E_{1y}(x,0;0) + C_1(x,0;0)]\psi_1(0).
 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали следующие условия согласования:

$$\varphi'_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi'_1(0) = \varphi_2(0), \quad \varphi'_2(0) = \psi'_2(0), \quad \varphi_1(0) = \psi_1(0),$$

Так как

$$1 + \mathfrak{G}_{y\xi}(x,0;0,0) - a_2(0,0)\mathfrak{G}_y(x,0;0,0) = 0,$$

$$u_{xy},$$

$$\mathfrak{G}_\eta(x,0;0,0) + \mathfrak{G}_y(x,0;0,0) = 0,$$

$$D_{1y\xi}(x,0;0) - E_{1y}(x,0;0) + C_1(x,0;0) = 0,$$

то $u_y(x,0) = \psi_2(x)$.

Для доказательства того, что функция (2.12) удовлетворяет уравнению (2.1), достаточно установить, что функция

$$u(x,y) = \int_0^x d\xi \int_0^y \mathfrak{G}(x,y;\xi,\eta) f_1(\xi,\eta) d\eta$$

удовлетворяет условию (2.1). В самом деле, мы могли бы вместо функции $u(x,y)$ ввести новую неизвестную функцию

$$\begin{aligned}
 w(x,y) = & u(x,y) - \{ \varphi_1(y) + x[\varphi_2(y) - \psi'_1(0)] + \psi_1(x) + y[\psi_2(x) - \\
 & - \psi_2(0)] - \psi'_2(0)xy - \psi_1(0) \},
 \end{aligned}$$

которая удовлетворяет уравнению (2.1) с другой правой частью и однородным условиям

$$w(0,y) = w(x,0) = w_x(0,y) = w_y(x,0) = 0.$$

Используя теорему симметричности и следующие свойства функции Римана

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{G}(x,y;x,\eta) &= \mathfrak{G}(x,y;\xi,y) = \mathfrak{G}_x(x,y;\xi,y) = \mathfrak{G}_y(x,y;x,\eta) = \\
 &= \mathfrak{G}_{xx}(x,y;\xi,\eta) = \mathfrak{G}_{yy}(x,y;x,\eta) = 0, \quad \mathfrak{G}_{xy}(x,y;x,y) = 1,
 \end{aligned}$$

найдем соответствующие производные:

$$u_x(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta_x(x, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\eta,$$

$$u_y(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta_y(x, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\eta,$$

$$u_{xx}(x, y) = \int_0^y \vartheta_x(x, y; x, \eta) f_1(x, \eta) d\eta + \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta_{xx}(x, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\eta,$$

$$u_{yy}(x, y) = \int_0^y \vartheta_y(x, y; x, \eta) f_1(\xi, \eta) d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta_{yy}(x, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\eta,$$

$$u_{xy}(x, y) = \int_0^y \vartheta_{xy}(x, y; x, \eta) f_1(x, \eta) d\eta + \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta_{xy}(x, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\eta,$$

$$u_{yx}(x, y) = \int_0^y \vartheta_{yx}(x, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta_{yx}(x, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\eta,$$

$$u_{xxyy}(x, y) = f_1(x, y) + \int_0^x \vartheta_{xxy}(x, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\xi +$$

$$+ \int_0^y \vartheta_{xyy}(x, y; x, \eta) f_1(x, \eta) d\eta + \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta_{xxyy}(x, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\eta.$$

Подставляя эти значения в (2.1) и учитывая, что

$$L_{I(x, y)}(\vartheta(x, y; \xi, \eta)) = 0,$$

$$\vartheta_{xxy}(x, y; \xi, \eta) + a_2(x, y) \vartheta_{xy}(x, y; \xi, \eta) = 0,$$

$$\vartheta_{xyy}(x, y; x, \eta) + a_1(x, y) \vartheta_{xy}(x, y; x, \eta) = 0$$

убеждаемся в том, что $L_I(u(x, y)) = f_1(x, y)$.

§ 2.3. ФУНКЦИЯ РИМАНА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В области $D_2 = \{(x, y) : 0 < x < \ell, -h_1 < y < 0\}$ рассмотрим линейное гиперболическое уравнение четвертого порядка

$$L_2(u) = u_{xxxu} + \alpha_1(x, y)u_{xxx} + \alpha_2(x, y)u_{xxy} + \beta_1(x, y)u_{xx} + \beta_2(x, y)u_{xy} + \gamma_1(x, y)u_x + \gamma_2(x, y)u_y + \delta(x, y)u = f_2(x, y), \quad (2.28)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2$), δ, f_2 - заданные функции.

З а д а ч а 2.2. (Задача Гурса). Требуется найти в области D_2 решение уравнения (2.28), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \chi_1(y), \quad u_x(0, y) = \chi_2(y), \\ u_{xx}(0, y) &= \chi_3(y), \quad -h_1 \leq y \leq 0, \\ u(x, 0) &= \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \end{aligned} \quad (2.29)$$

причем $\chi_1(0) = \tau_1(0)$, $\chi_2(0) = \tau_1'(0)$, $\chi_3(0) = \tau_1''(0)$.

Сведением задачи 2.2 к эквивалентной системе интегральных уравнений, нетрудно показать ее разрешимость в классе M_1 , где

$$M_1 = \{u : u \in C^1(\bar{D}_2); u_{xx}, u_{xy} \in C(\bar{D}_2); u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xxxu} \in C(D_2)\}$$

Т е о р е м а 2.4. Если функции

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i = 1, 2), \delta, f \in C(\bar{D}_2), \tau_1 \in C^3[0, \ell], \chi_1, \chi_2, \chi_3 \in C^1[-h_1, 0],$$

$\tau_1(0) = \chi_1(0)$, $\tau_1'(0) = \chi_2(0)$, $\tau_1''(0) = \chi_3(0)$, то решение задачи Гурса в классе M_1 существует, единственно и непрерывно зависит от данных $f_2, \tau_1, \chi_i (i = \overline{1, 3})$.

Пусть

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i = 1, 2), \delta, f_2, \alpha_{1xxx}, \alpha_{2xxy}, \beta_{1xx}, \beta_{2xxy}, \gamma_{1x}, \gamma_{2y} \in C(\overline{D_2}). \quad (2.30)$$

Тогда определен формально сопряженный оператор L_2^* и имеет место тождество

$$\mathcal{L}_2(u) - uL_2^*(\vartheta) = \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \quad (2.31)$$

где

$$\begin{aligned} L_2^*(\vartheta) &= \vartheta_{\xi\xi\xi\eta} - (\alpha_1\vartheta)_{\xi\xi\xi} - (\alpha_2\vartheta)_{\xi\xi\eta} + (\beta_1\vartheta)_{\xi\xi} + \\ &+ (\beta_2\vartheta)_{\xi\eta} - (\gamma_1\vartheta)_\xi - (\gamma_2\vartheta)_\eta + \delta\vartheta, \\ P_1 &= [\vartheta_{\xi\xi\xi} - (\alpha_2\vartheta)_{\xi\xi} + (\beta_2\vartheta)_\xi - \gamma_2\vartheta]u, \\ Q_1 &= \vartheta u_{\xi\xi\eta} - \vartheta_\xi u_{\xi\eta} + \vartheta_{\xi\xi} u_\eta + \alpha_1\vartheta u_{\xi\xi} - (\alpha_1\vartheta)_\xi u_\xi + \\ &+ (\alpha_1\vartheta)_{\xi\xi} u + \alpha_2\vartheta u_{\xi\eta} - (\alpha_2\vartheta)_\xi u_\eta + \beta_1\vartheta u_\xi - (\beta_1\vartheta)_\xi u + \beta_2\vartheta u_\eta + \gamma_1\vartheta u. \end{aligned}$$

Функцией Римана оператора L_2 называется функция $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$

удовлетворяющая условиям :

1) функция $\vartheta(x, y; \xi, \eta) \in M_1$ по совокупности переменных $(x, y; \xi, \eta)$ на $\overline{D_2} \times \overline{D_2}$;

2) при каждой $(x, y) \in \overline{D_2}$ функция $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению $L_{2(\xi, \eta)}^*(\vartheta(x, y; \xi, \eta)) = 0, (\xi, \eta) \in D_2$ и условиям на характеристиках $\xi = x, \eta = y$:

$$\vartheta(x, y; x, \eta) = 0, \quad \vartheta_\xi(x, y; x, \eta) = 0,$$

$$\vartheta_{\xi\xi}(x, y; x, \eta) = \exp\left[\int_y^\eta a_1(x, \eta_1) d\eta_1\right], \quad \vartheta(x, y; \xi, y) = \omega(x, y; \xi),$$

где $\omega(x, y; \xi)$ - решение следующей задачи Коши:

$$\vartheta_{\xi\xi\xi}(x, y; \xi, y) - \alpha_2(\xi, y)\vartheta_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) + [\beta_2(\xi, y) - 2\alpha_{2\xi}(\xi, y)] \times \\ \times \vartheta_{\xi}(x, y; \xi, y) - [\alpha_{2\xi\xi}(\xi, y) - \beta_{2\xi}(\xi, y) + \gamma_2(\xi, y)]\vartheta(x, y; \xi, y) = 0,$$

$$\vartheta(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad \vartheta_{\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad \vartheta_{\xi\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1.$$

Существование и единственность функции Римана $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ непосредственно следует из теоремы 2.4.

Интегрируя тождество (2.31) по области

$\Omega = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, y < \eta < \theta\}$, где (x, y) – произвольная точка области D_2 , имеем

$$u(x, y) = \vartheta_{\xi\xi\xi}(x, y; x, 0)\tau_1(x) + \int_0^x A_3(x, y; \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \\ + \int_0^y [\vartheta(x, y; 0, \eta)\chi'_3(\eta) + \alpha_1(0, \eta)\vartheta(x, y; 0, \eta)\chi_3(\eta) - B_3(x, y; \eta)\chi'_2(\eta) - \\ - C_3(x, y; \eta)\chi_2(\eta) + D_3(x, y; \eta)\chi'_1(\eta) + E_3(x, y; \eta)\chi_1(\eta)] d\eta + \\ + \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta(x, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta)d\eta, \quad (2.32)$$

где

$$A_3(x, y; \xi) = \vartheta_{\xi\xi\xi}(x, y; \xi, 0) - \alpha_2(\xi, 0)\vartheta_{\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + [\beta_2(\xi, 0) - \\ - 2\alpha_{2\xi}(\xi, 0)]\vartheta_{\xi}(x, y; \xi, 0) + [\beta_{2\xi}(\xi, 0) - \gamma_2(\xi, 0) - \\ - \alpha_{2\xi\xi}(\xi, 0)]\vartheta(x, y; \xi, 0),$$

$$B_3(x, y; \eta) = \vartheta_{\xi}(x, y; 0, \eta) - \alpha_2(0, \eta)\vartheta(x, y; 0, \eta),$$

$$C_3(x, y; \eta) = \alpha_1(\theta, \eta) \mathfrak{G}_\xi(x, y; \theta, \eta) + [a_{1\xi}(\theta, \eta) - \beta_1(\theta, \eta)] \mathfrak{I}(x, y; \theta, \eta),$$

$$D_3(x, y; \eta) = \mathfrak{G}_{\xi\xi}(x, y; \theta, \eta) - \alpha_2(\theta, \eta) \mathfrak{G}_\xi(x, y; \theta, \eta) - [\alpha_{2\xi}(\theta, \eta) - \beta_2(\theta, \eta)] \mathfrak{I}(x, y; \theta, \eta),$$

$$E_3(x, y; \eta) = \alpha_1(\theta, \eta) \mathfrak{G}_{\xi\xi}(x, y; \theta, \eta) + [2\alpha_{1\xi}(\theta, \eta) - \beta_1(\theta, \eta)] \times \\ \times \mathfrak{G}_\xi(x, y; \theta, \eta) + [\alpha_{1\xi\xi}(\theta, \eta) - \beta_{1\xi}(\theta, \eta) + \gamma_1(\theta, \eta)] \mathfrak{I}(x, y; \theta, \eta).$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.28) в области

$$D_3 = \{(x, y) : -\ell_1 < x < \theta, \theta < y < h\}.$$

Тогда решение задачи Гурса для уравнения (2.28) с условиями

$$u(\theta, y) = \tau_2(y), \quad u_x(\theta, y) = \nu_2(y), \quad u_{xx}(\theta, y) = \mu_2(y), \quad \theta \leq y \leq h, \\ u(x, \theta) = \psi_2(x), \quad -\ell \leq x \leq \theta. \quad (2.33)$$

имеет вид

$$u(x, y) = \mathfrak{G}_{\xi\xi}(x, y; x, \theta) \psi_2(x) - \int_0^x A_4(x, y; \xi) \psi_2(\xi) d\xi + \\ + \int_0^y [\mathfrak{I}(x, y; \theta, \eta) \mu_2'(\eta) + \alpha_1(\theta, \eta) \mathfrak{G}_\xi(x, y; \theta, \eta) \mu_2(\eta) - \\ - B_4(x, y; \eta) \nu_2'(\eta) - C_4(x, y; \eta) \nu_2(\eta) + D_4(x, y; \eta) \tau_2'(\eta) + \\ + E_4(x, y; \eta) \tau_2(\eta)] d\eta + \int_0^x d\xi \int_0^y \mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta) f_2(\xi, \eta) d\eta, \quad (2.34)$$

где $\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана, построенная в области D_3 , а

A_4, B_4, C_4, D_4 и E_4 определяются также как и в предыдущем случае.

Нетрудно заметить, что $\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)$ – удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\vartheta(x, y; \xi, \eta) = & \frac{1}{2}(\xi - x)^2 + \int_y^\eta \alpha_1(\xi, \eta_1) \vartheta(x, y; \xi, \eta_1) d\eta_1 + \\ & + \int_x^\xi H(\xi, \eta; \xi_1) \vartheta(x, y; \xi_1, \eta) d\xi_1 + \int_x^\xi d\xi_1 \int_y^\eta K_1(\xi, \xi_1; \eta_1) \vartheta(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1,\end{aligned}$$

где

$$H(\xi, \eta; \xi_1) = \alpha_2(\xi_1, \eta) - (\xi - \xi_1) \beta_2(\xi_1, \eta) - \frac{1}{2}(\xi - \xi_1)^2 \gamma_2(\xi_1, \eta),$$

$$K_1(\xi, \xi_1; \eta_1) = \frac{1}{2}(\xi - \xi_1)^2 \delta(\xi_1, \eta_1) - (\xi - \xi_1) \gamma_1(\xi_1, \eta_1) - \beta_1(\xi_1, \eta_1).$$

Введем новую неизвестную функцию $\vartheta_0(x, y; \xi, \eta)$ по формуле

$$\begin{aligned}\vartheta(x, y; \xi, \eta) = & \vartheta_0(x, y; \xi, \eta) + \int_y^\eta T_1(\xi, \eta; \eta_2) \vartheta_0(x, y; \xi, \eta_2) d\eta_2 + \\ & + \int_x^\xi T_2(\xi, \eta; \xi_2) \vartheta_0(x, y; \xi_2, \eta) d\xi_2,\end{aligned}$$

где $T_1(\xi, \eta; \eta_2)$ и $T_2(\xi, \eta; \xi_2)$ - определяются как решение следующих уравнений Вольтерра второго рода:

$$T_1(\xi, \eta; \eta_1) = \alpha_1(\xi, \eta_1) + \int_{\eta_1}^\eta \alpha_1(\xi, \eta_2) T_1(\xi, \eta_2; \eta_1) d\eta_2,$$

$$T_2(\xi, \eta; \xi_1) = H(\xi, \eta; \xi_1) + \int_{\xi_1}^\xi H(\xi, \eta; \xi_2) T_2(\xi_2, \eta; \xi_1) d\xi_2.$$

Заметим, что

$$T_1(\xi, \eta; \eta_1) = \alpha_1(\xi, \eta_1) \exp(\alpha_1(\xi, \eta_1)(\eta - \eta_1)),$$

$$T_2(\xi, \eta; \xi_1) = H(\xi, \eta; \xi_1) + \int_{\xi_1}^\xi R_1(\xi, \eta; \xi_2) H(\xi_2, \eta; \xi_1) d\xi_2,$$

где $R_1(\xi, \eta; \xi_2)$ - резольвента ядра $H(\xi, \eta; \xi_2)$. Тогда для $\vartheta_0(x, y; \xi, \eta)$ получаем уравнение

$$\vartheta_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi - x)^2 + \int_x^\xi d\xi \int_y^\eta K(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \vartheta_0(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1,$$

решение которого имеет вид

$$\vartheta_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi - x)^2 + \frac{1}{2} \int_x^\xi d\xi_1 \int_y^\eta R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) (\xi_1 - x)^2 d\eta_1,$$

где

$$\begin{aligned} K(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) &= K_1(\xi, \xi_1; \eta_1) + \alpha_1(\xi, \eta_1) T_2(\xi, \eta_1; \xi_1) + H(\xi, \eta; \xi_1) T_1(\xi_1, \eta, \eta_2) + \\ &+ \int_{\eta_1}^\eta K_1(\xi, \xi_1, \eta_2) T_1(\xi_1, \eta_2, \eta_1) d\eta_2 + \int_{\xi_1}^\xi K_1(\xi, \xi_2, \eta_1) T_2(\xi_2, \eta_1, \xi_1) d\xi_2, \end{aligned}$$

а $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ - резольвента ядра $K_1(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$.

§ 2.4. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В области $D_1 = \{x, y) : 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнения

$$L(u) = u_{xxyy} + cu = 0, \quad c = \text{const} \quad (2.35)$$

Уравнение (2.35) по классификацию, указанному в § 1.1 главы I, принадлежит к гиперболическому типу. Прямые $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ являются действительными двукратными характеристиками.

Как известно, задача Дирихле для уравнения гиперболического типа второго порядка с данными на характеристиках вообще говоря является некорректной. Но в некоторых случаях удастся доказать корректность задачи типа Дирихле для гиперболических уравнений второго порядка [103].

В этом параграфе рассматривается задача Дирихле для уравнения (2.35) с данными на характеристиках.

Уравнения (1) будем изучать в классе функций

$$M_2 = \{u : u \in C^1(\bar{D}_1); u_{xy}, u_{xxy}, u_{xyy} \in C(\bar{D}_1); u_{xxyy} \in C(D_1)\}.$$

З а д а ч а 2.3 (Задача Дирихле). Требуется найти в области D_1 функцию $u(x, y)$ из класса M_2 , удовлетворяющую уравнению (2.35) и краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(\ell, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2.36)$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u(x, h) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2.37)$$

где $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$, ($i = 1, 2$) - заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \psi_1(\ell) = \varphi_2(0), \quad \varphi_2(h) = \psi_2(\ell), \quad \psi_2(0) = \varphi_2(h). \quad (2.38)$$

Т е о р е м а 2.5. Если $c \geq 0$, то решение задачи Дирихле в классе M_2 единственно.

Для доказательства теоремы 2.5 рассмотрим однородную задачу Дирихле и используем метод «abc» [99].

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} B(y)uL(u) = & (-B(y)u_y u_{xy} - B'(y)uu_{xy})_x - (-B(y)uu_{xy} - \\ & - \frac{1}{2}B'(y)u_x^2)_y - \frac{1}{2}B''(y)u_x^2 + B(y)u_{xy}^2 + B(y)cu^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $B(y)$ - произвольная функция из класса $C^2[0, h]$.

Интегрируя тождество (2.39) по области D_1 и используя формулу Грина с учетом однородных краевых условий (2.36), (2.37), будем иметь:

$$\iint_{D_1} [-\frac{1}{2}B''(y)u_x^2 + B(y)u_{xy}^2 + B(y)cu^2] dx dy = 0. \quad (2.40)$$

Подберем $B(y)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям

$$\forall y \in [0, h] : B(y) > 0, \quad B''(y) < 0.$$

Например, в качестве $B(y)$ можно выбрать функцию

$$B(y) = \exp\left(\frac{-y^2}{8h^2}\right).$$

Очевидно, что

$$B(y) > 0, \quad B''(y) = \frac{1}{16h^4}(y-2h)(y+2h)\exp\left(\frac{-y^2}{8h^2}\right) < 0, \quad \forall y \in [0, h].$$

Тогда из (2.40), при $c \geq 0$ будем иметь

$$\forall (x, y) \in \bar{D}_1 : u_x \equiv 0, \quad u_{xy} \equiv 0, \quad \forall (x, y) \in D_1 : u = 0.$$

Отсюда следует, что $\forall (x, y) \in \bar{D}_1 : u(x, y) \equiv 0$.

Теорема 2.5 доказана.

Отметим, что условие $c \geq 0$ имеет существенное значение, так как невыполнение этого условия приведет к нарушению единственности решения задачи Дирихле.

Например, при $c_n = -\frac{\pi^4 n^4}{\ell^2 h^2}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ однородная задача Дирих-

ле для уравнения (2.36), то есть для уравнения

$$u_{xxuy} - \frac{\pi^4 n^4}{\ell^2 h^2} u = 0,$$

имеет счетное число нетривиальных решений вида

$$u_n(x, y) = A \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \frac{\pi n}{h} y, \quad A = \text{const}.$$

Теорема 2.6. Если $\varphi_i(y) \in C^2[0, h]$, $\psi_i(x) \in C^2[0, \ell]$ ($i = 1, 2$) и выполнены условия согласования (2.38), то решение задачи Дирихле существует и принадлежит классу M_2 .

Доказательство. Для доказательства существования решения задачи Дирихле рассмотрим вспомогательную задачу Гурса для уравнения (2.36) с данными

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \chi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2.41)$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \chi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2.42)$$

где $\chi_1(y)$, $\chi_2(x)$ - пока неизвестные функции.

Известно, что если $\varphi_1(y), \chi_1(y) \in C^2[0, h]$, $\psi_1(x), \chi_2(x) \in C^2[0, \ell]$, то решение задачи Гурса (2.36), (2.41), (2.42) существует, единственно и представимо в виде [см. § 2.1 главы II]

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \mathfrak{G}_{\eta\xi}(x, y; 0, y) \varphi_1(y) - \mathfrak{G}_{\eta}(x, y; 0, y) \chi_1(y) + \\ & + \int_0^y [\mathfrak{G}_{\eta\eta}(x, y; 0, \eta) \chi_1(\eta) - \mathfrak{G}_{\xi\eta\eta}(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta)] d\eta + \\ & + \int_0^x [\mathfrak{G}(x, y; \xi, 0) \chi_2''(\xi) - \mathfrak{G}_{\eta}(x, y, \xi, 0) \psi_2''(\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где

$$\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^n}{[(2n+1)!]^2} (\xi - x)^{2n+1} (\eta - y)^{2n+1} \quad (2.44)$$

- функция Римана.

Отметим, что функция $\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)$ является решением сопряженной задачи:

$$L^*(\vartheta) = \vartheta_{\eta\eta\xi\xi} + c\vartheta = 0,$$

$$\vartheta(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = 0, \quad \vartheta_\xi(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = \omega_1(\eta; x, y), \quad 0 \leq \eta \leq y, \quad (2.45)$$

$$\vartheta(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = 0, \quad \vartheta_\eta(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = \omega_2(\xi; x, y), \quad 0 \leq \xi \leq x,$$

где $\omega_1(\eta; x, y)$ и $\omega_2(\xi; x, y)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно:

$$\vartheta_{\xi\eta\eta}(x, y; x, \eta) = 0,$$

$$\vartheta_\xi(x, y; x, \eta)|_{\eta=y} = 0, \quad \vartheta_{\xi\eta}(x, y; x, \eta)|_{\eta=y} = 1, \quad 0 \leq \eta \leq y;$$

$$\vartheta_{\eta\xi\xi}(x, y; \xi, y) = 0,$$

$$\vartheta_\eta(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad \vartheta_{\eta\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1, \quad 0 \leq \xi \leq x.$$

Нетрудно заметить что задача (2.45) эквивалентно сводится к решению интегрального уравнения Вольтера второго рода

$$\vartheta(x, y; \xi, \eta) = (\xi - x)(\eta - y) - c \int_x^\xi d\xi_1 \int_y^\eta d\eta_1 (\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1) \vartheta(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1,$$

решение которого представимо в виде (2.44).

Для определения неизвестных функций $\chi_1(y)$, $\chi_2(x)$, воспользуемся краевыми условиями $u(\ell, y) = \varphi_2(y)$ и $u(x, h) = \psi_2(x)$. Тогда получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \vartheta_\eta(\ell, y; 0, y) \chi_1(y) = \Phi_1(y) + \\ + \int_0^y \vartheta_{\eta\eta}(\ell, y; 0, \eta) \chi_1(\eta) d\eta + \int_0^\ell \vartheta(\ell, y; \xi, 0) \chi_2''(\xi) d\xi, \\ \int_0^x \vartheta(x, h; \xi, 0) \chi_2''(\xi) d\xi + \int_0^h \vartheta_{\eta\eta}(x, h; 0, \eta) \chi_1(\eta) d\eta = \Phi_2(x), \end{cases} \quad (2.46)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1(y) &= \mathfrak{G}_{\eta\xi}(\ell, y; \theta, y) \varphi_1(y) - \varphi_2(y) - \\ &- \int_0^y \mathfrak{G}_{\xi\eta\eta}(\ell, y; \theta, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^\ell \mathfrak{G}(\ell, y; \xi, \theta) \psi_1''(\xi) d\xi, \\ \Phi_2(x) &= \psi_2(x) - \mathfrak{G}_{\eta\xi}(x, h; \theta, h) \varphi_1(h) + \mathfrak{G}_\eta(x, h; \theta, h) \psi_2'(0) + \\ &+ \int_0^h \mathfrak{G}_{\xi\eta\eta}(x, h; \theta, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_0^x \mathfrak{G}_\eta(x, h; \xi, \theta) \psi_1''(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Дважды продифференцировав по x второе уравнение системы (2.46) и учитывая равенства $\mathfrak{G}_\eta(\ell, y; \theta, y) = -\ell$, $\mathfrak{G}_x(x, h; x, \theta) = h$, придем к системе интегральных уравнений типа Фредгольма:

$$\begin{cases} \ell \chi_1(y) + \int_0^y \mathfrak{G}_{\eta\eta}(\ell, y; \theta, \eta) \chi_1(\eta) d\eta + \int_0^\ell \mathfrak{G}(\ell, y; \xi, \theta) \chi_2''(\xi) d\xi = -\Phi_1(y), \\ h \chi_2''(x) + \int_0^x \mathfrak{G}_{xx}(x, h; \xi, \theta) \chi_2''(\xi) d\xi + \int_0^h \mathfrak{G}_{\eta\eta xx}(x, h; \theta, \eta) \chi_1(\eta) d\eta = \Phi_2''(x). \end{cases} \quad (2.47)$$

Обращая вольтерровскую часть первого уравнения системы (2.47) относительно $\chi_1(y)$, будем иметь

$$\chi_1(y) = \Phi_1^*(y) + \int_0^\ell K_1(y, \xi) \chi_2''(\xi) d\xi, \quad (2.48)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1^*(y) &= -\frac{1}{\ell} \Phi_1(y) - \frac{1}{\ell} \int_0^y R_1(y, \eta) \Phi_1(\eta) d\eta, \\ K_1(y, \xi) &= -\frac{1}{\ell} \mathfrak{G}(\ell, y; \xi, \theta) - \frac{1}{\ell} \int_0^y R_1(y, \eta) \mathfrak{G}(\ell, \eta; \xi, \theta) d\eta, \\ R_1(y, \eta) &\text{ - резольвента ядра } -\frac{1}{\ell} \mathfrak{G}_{\eta\eta}(\ell, y; \theta, \eta).\end{aligned}$$

Подставляя значение $\chi_1(y)$ во второе уравнение системы (2.47), получаем уравнение

$$h\chi_2''(x) + \int_0^x \mathfrak{G}_{xx}(x, y; \xi, \theta) \chi_2''(\xi) d\xi + \int_0^\ell K_2(x, \xi) \chi_2''(\xi) d\xi = \Phi_2^*(x), \quad (2.49)$$

где

$$K_2(x, \xi) = \int_0^h \mathfrak{G}_{\eta\eta xx}(x, h; \theta, \eta) K_1(\eta, \xi) d\eta,$$

$$\Phi_2^*(x) = \Phi_2''(x) - \int_0^h \mathfrak{G}_{\eta\eta xx}(x, h; \theta, \eta) \Phi_1^*(\eta) d\eta.$$

Наконец, обращая вольтеровскую часть уравнения (2.49), придем к интегральному Фредгольму второго рода

$$\chi_2''(x) + \int_0^\ell K(x, \xi) \chi_2''(\xi) d\xi = \tilde{\Phi}_2(x), \quad (2.50)$$

где

$$K(x, \xi) = K_2(x, \xi) + \int_0^x R_2(x, \xi_1) K_2(\xi_1, \xi) d\xi_1,$$

$$\tilde{\Phi}_2(x) = \Phi_2^*(x) + \int_0^x R_2(x, \xi) \Phi_2^*(\xi) d\xi,$$

$$R_2(x, \xi) - \text{резольвента ядра} - \frac{1}{h} \mathfrak{G}_{xx}(x, h; \xi, \theta).$$

Ограничения, наложенные на граничные функции $\varphi_i(y)$, $\varphi_i(x) (i = 1, 2)$, позволяют утверждать, что $\tilde{\Phi}_2(x) \in C[0, \ell]$. Гладкость ядра $K(x, \xi)$ следует из свойства функции Римана $\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)$. Кроме того $K(x, x) = 0$.

Таким образом, разрешимость задачи Дирихле эквивалентно сведена к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.50).

В силу единственности решения задачи Дирихле и альтернативы Фредгольма, уравнение (2.50) имеет единственное решение, принадлежащее классу $C[0, \ell]$.

Решение уравнения (2.50) представим в виде

$$\chi_2''(x) = \tilde{\Phi}_2^*(x) + \int_0^\ell R(x, \xi) \tilde{\Phi}_2(\xi) d\xi \equiv f(x),$$

где $R(x, \xi)$ - резольвента ядра $K(x, \xi)$, а $f(x)$ - известная функция.

Таким образом, для определения $\chi_2(x)$, мы приходим к задаче

$$\chi_2''(x) = f(x), \quad \chi_2(0) = \varphi_1'(0), \quad \chi_2(\ell) = \varphi_2'(0),$$

решение которого имеет вид

$$\chi_2(x) = \varphi_1'(0) + \frac{x}{\ell} [\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0)] + \int_0^\ell G_0(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

где

$$G_0(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi(x - \ell)}{\ell}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{x(\xi - \ell)}{\ell}, & x \leq \xi \leq \ell. \end{cases}$$

Итак, функция $\chi_2(x)$ найдена. Тогда другая неизвестная функция $\chi_1(y)$ определяется по формуле (2.48).

Нетрудно заметить, что $\chi_1(y) \in C^2[0, h]$, $\chi_2(x) \in C^2[0, \ell]$. Подставляя значения этих функций в формулу (2.43), полностью определим решение задачи Дирихле. Нетрудно показать принадлежность решения (2.43) к классу M_2 .

Теорема 2.6 доказана.

ГЛАВА III. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В этой главе рассмотрены основные краевые задачи для линейных гиперболических уравнений четвертого порядка. Рассмотрены случаи, когда коэффициенты уравнения терпят разрывы.

§ 3.1. ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В области $D_I = \{(x, y) : 0 < x < \ell, \quad 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} L(u) = u_{xxyy} + a_1 u_{xxy} + a_2 u_{xyy} + b_1 u_{xx} + b_2 u_{xy} + b_3 u_{yy} + \\ + c_1 u_x + c_2 u_y + du = f_I(x, y). \end{aligned} \quad (2.1)$$

З а д а ч а 3.1. (Первая краевая задача). Найти в области D_I решение уравнения (2.1) из класса M , удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(\ell, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3.2)$$

где $\varphi_i(y), \psi_i(x)$ ($i=1,2$) - заданные функции, причем

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_1(\ell), \\ \varphi_1'(\ell) = \psi_2(\ell), \quad \varphi_2'(\ell) = \psi_2(0). \end{cases} \quad (3.3)$$

Пусть $u_x(0, y) = v(y)$, где $v(y)$ - неизвестная функция. Тогда решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (3.2) и

$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = v(y)$, имеет вид (см. § 2.1 главы II)

$$u(x, y) = T(x, y) - \mathcal{G}_\eta(x, y; 0, y)v(y) + \int_0^y B_I(x, y; \eta)v(\eta)d\eta, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned}
 T(x, y) = & A_1(x, y)\varphi_1(y) - \int_0^y C_1(x, y; \eta)\varphi_1(\eta)d\eta + \\
 & + \int_0^x [\mathcal{G}(x, y; \xi, \theta)\psi_2''(\xi) - D_1(x, y; \xi)\psi_1''(\xi) + \\
 & + a_2(\xi, \theta)\mathcal{G}(x, y; \xi, \theta)\psi_2'(\xi) - E_1(x, y; \xi)\psi_1'(\xi) + \\
 & + b_3(\xi, \theta)\mathcal{G}(x, y; \xi, \theta)\psi_2(\xi) - F_1(x, y; \xi)\psi_1(\xi)] d\xi + \\
 & + \int_0^x d\xi \int_0^y \mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)f_1(\xi, \eta)d\eta.
 \end{aligned}$$

Из (3.4), с учетом второго условия (3.1), имеем

$$\mathcal{G}_\eta(\ell, y; \theta, y)v(y) = \int_0^y B_1(\ell, y; \eta)v(\eta)d\eta + T_1(y), \quad (3.5)$$

где $T_1(y) = T(\theta, y) - \varphi_2(y)$.

В силу первого неравенства (2.17) заключаем, что уравнение (3.5) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и имеет единственное решение. Поэтому решение $v(y)$ уравнение (3.5) принадлежит классу $C^2[0, h]$. Подставив $v(y)$ в представление (3.4), найдем решение задачи 3.1.

Итак, справедлива следующая

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполняются условия (2.3), (2.16), (3.3) и

$$\varphi_i(y) \in C^2[0, h], (i = 1, 2), \quad \psi_i(x) \in C^2[0, \ell], \quad (i = 1, 2).$$

Тогда задача 3.1 в классе M имеет единственное решение.

З а д а ч а 3.2. (Третья краевая задача). Найти в области D_1 решение $u(x, y)$ уравнения (2.1) из класса M , удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}
 u_x(\theta, y) &= \beta_1(y)u(\theta, y) + \mu_1(y), & 0 \leq y \leq h, \\
 u_x(\ell, y) &= \beta_2(y)u(\ell, y) + \mu_2(y), & 0 \leq y \leq h, \\
 u(x, \theta) &= \psi_1(x), \quad u_y(x, \theta) = \psi_2(x), & 0 \leq x \leq \ell,
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\beta_i(y)$, $\mu_i(y)$, $\psi_i(x)$ ($i=1,2$) - заданные функции, причем

$$\psi'_1(0) = \beta_1(0)\psi_1(0) + \mu_1(0), \quad \psi'_1(\ell) = \beta_2(0)\psi_1(\ell) + \mu_2(0). \quad (3.7)$$

Пусть $u(0, y) = \tau_1(y)$, $u(\ell, y) = \tau_2(y)$. Тогда из (3.6) имеем, что

$$u_x(0, y) = \beta_1(y)\tau_1(y) + \mu_1(y), \quad u_x(\ell, y) = \beta_2(y)\tau_2(y) + \mu_2(y).$$

Из (2.11) и (2.13) непосредственно получим

$$\begin{aligned} u(x, y) = & [A_1(x, y) - \mathfrak{G}_\eta(x, y; 0, y)\beta_1(y)]\tau_1(y) + \\ & + \int_0^y [B_1(x, y; \eta)\beta_1(\eta) - C_1(x, y; \eta)]\tau_1(\eta)d\eta + H_1(x, y), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} u(x, y) = & [A_2(x, y) - w_\eta(x, y; \ell, y)\beta_2(y)]\tau_2(y) + \\ & + \int_0^y [B_2(x, y; \eta)\beta_2(\eta) - C_2(x, y; \eta)]\tau_2(\eta)d\eta + H_2(x, y), \end{aligned}$$

где $H_i(x, y)$ ($i=1,2$) - известные функции. Полагая $x = \ell$ и $x = 0$ в (3.8)

соответственно, имеем

$$\begin{aligned} \tau_2(y) = & [A_1(\ell, y) - \mathfrak{G}_\eta(\ell, y; 0, y)\beta_1(y)]\tau_1(y) + \\ & + \int_0^y [B_1(\ell, y; \eta)\beta_1(\eta) - C_1(\ell, y; \eta)]\tau_1(\eta)d\eta + H_1(\ell, y), \\ \tau_1(y) = & [A_2(0, y) - w_\eta(0, y; \ell, y)\beta_2(y)]\tau_2(y) + \\ & + \int_0^y [B_2(0, y; \eta)\beta_2(\eta) - C_2(0, y; \eta)]\tau_2(\eta)d\eta + H_2(0, y). \end{aligned}$$

Отсюда, исключая $\tau_2(y)$, приходим к уравнению

$$\gamma(y)\tau_1(y) = \int_0^y K(y, \eta)\tau_1(\eta)d\eta + H_3(y), \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(y) = & 1 - \{w_{\eta\xi}(0, y; \ell, y) - [a_2(\ell, y) + \beta_2(y)]w_\eta(0, y; \ell, y) \times \\ & \times \{\mathfrak{G}_{\eta\xi}(\ell, y; 0, y) - [a_2(0, y) + \beta_1(y)]\mathfrak{G}_\eta(\ell, y; 0, y)\}\}, \end{aligned}$$

а $K(y, \eta)$, $H_3(y)$ - известные функции.

Нетрудно заметить, что если

$$\forall y \in [0, \eta] : a_2(\ell, y) + \beta_2(y) \leq 0, \quad a_2(0, y) + \beta_1(y) \geq 0, \quad (3.10)$$

то $\gamma(y) < 0$; следовательно, уравнение (3.9) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которая допускает единственное решение.

Итак, справедлива

Т е о р е м а 3.2. Пусть выполняются условия (2.3), (2.16), (3.7), (3.10) и $\beta_i(y), \mu_i(y) \in C^2[0, h]$, $\psi_i(x) \in C^2[0, \ell]$, ($i = 1, 2$). Тогда решение задачи 3.2 в классе M существует и единственно.

Отметим, что если $\beta_i(y) \equiv 0$ ($i = 1, 2$), то получим вторую краевую задачу.

§ 3.2. АНАЛОГ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В треугольнике D_I , ограниченной отрезками AC и BC характеристик $x=0$, $y=h>0$ уравнения (2.1) и отрезком AB прямой $y=x$, рассмотрим задачу Коши.

З а д а ч а 3.3 (Задача Коши). Найти в области D_I решение уравнения (2.1) из класса $M_3 = \{u : u, u_x, u_{xy}, u_{xxy} \in C(\overline{D_I})\}$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{AB} = \tau(x), \quad u_x|_{AB} = \nu(x), \quad u_{xy}|_{AB} = \mu(x), \quad u_{xxy}|_{AB} = \chi(x), \quad (3.11)$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$, $\chi(x)$ - заданные функции.

Используя формулу (2.5) по треугольнику

$D'_I = \{(\xi, \eta) : x < \xi < y, \xi < \eta < y\}$ (см. рис. 6) и проводя аналогичные вычисления как и в § 2.1, получим

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \tau(y) - \int_x^y [\vartheta(x, y; \xi, \xi) \chi(\xi) + A_3(x, y; \xi) \mu(\xi) + \\ & + B_3(x, y; \xi) \nu(\xi) + C_3(x, y; \xi) \tau(\xi)] d\xi - \\ & - \int_x^y d\xi \int_x^y \vartheta(x, y; \xi, \eta) f_1(x, y) d\eta, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$A_3(x, y; \xi) = \vartheta_\eta(x, y; \xi, \xi) - [a_1(\xi, \xi) - a_2(\xi, \xi)] \vartheta(x, y; \xi, \xi),$$

$$B_3(x, y; \xi) = \vartheta_{\eta\xi}(x, y; \xi, \xi) - a_1(\xi, \xi) \vartheta_\xi(x, y; \xi, \xi) -$$

$$- a_2(\xi, \xi) \vartheta_\eta(x, y; \xi, \xi) - [b_1(\xi, \xi) - b_2(\xi, \xi) + b_3(\xi, \xi) +$$

$$+ a_{1\xi}(\xi, \xi) + a_{2\eta}(\xi, \xi)] \vartheta(x, y; \xi, \xi),$$

$$C_3(x, y; \xi) = \vartheta_{\eta\eta\xi}(x, y; \xi, \xi) - a_1(\xi, \xi) \vartheta_{\eta\xi}(x, y; \xi, \xi) -$$

$$- a_2(\xi, \xi) \vartheta_{\eta\eta}(x, y; \xi, \xi) + [b_1(\xi, \xi) - b_3(\xi, \xi) - a_{1\eta}(\xi, \xi)] \vartheta_\xi(x, y; \xi, \xi) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ [b_2(\xi, \xi) - 2b_3(\xi, \xi) - a_{1\xi}(\xi, \xi) - 2a_{2\eta}(\xi, \xi)] \vartheta_\eta(x, y; \xi, \xi) + \\
 &+ [b_{1\xi}(\xi, \xi) + b_{2\eta}(\xi, \xi) - b_{3\xi}(\xi, \xi) - 2b_{3\eta}(\xi, \xi) - a_{1\eta\xi}(\xi, \xi) - \\
 &- a_{2\eta\eta}(\xi, \xi) - c_1(\xi, \xi) + c_2(\xi, \xi)] \vartheta(x, y; \xi, \xi).
 \end{aligned}$$

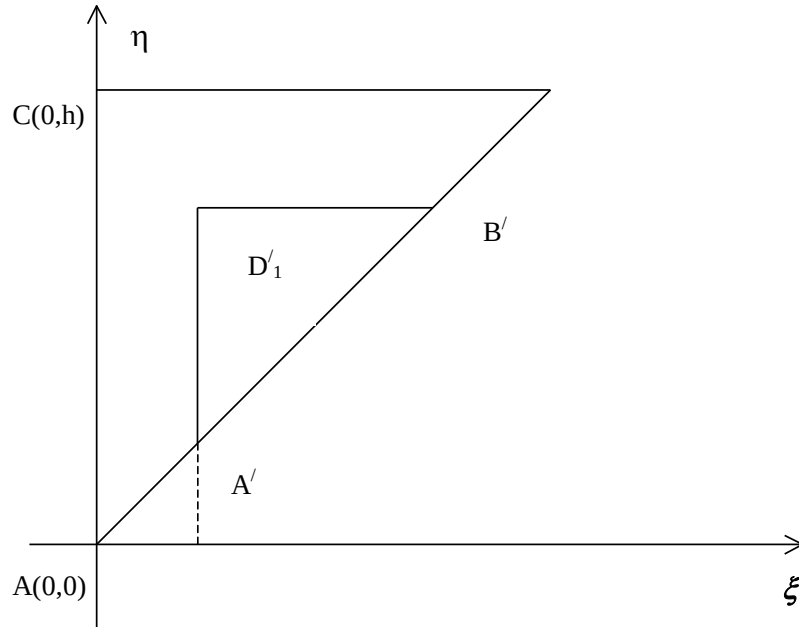


Рис. 6.

Формула (3.12) позволяет в явном виде написать решение задачи (2.1), (3.11).

Теорема 3.3. Пусть выполняются условия (2.3) и

$$\tau(x) \in C^2[0, h], \quad v(x), \quad \mu(x) \in C^1[0, h],$$

$$\chi(x) \in C[0, h], \quad f_1(x, y) \in C(\overline{D}_1).$$

Тогда в области D_1 решение задачи 3.3 существует, единственно и представимо в виде (3.12).

Из формулы (3.12) следует, что значение решения задачи Коши в некоторой точке $C'(x, y)$ не зависит от данных Коши вне треугольника $\Delta A'B'C'$, образованного двумя характеристиками $C'A'$, $C'B'$ и отрезком $A'B'$, несущего данные Коши.

Таким образом, из формулы (3.12) вытекает вывод, вполне аналогичный выводу из формулы Римана в теории гиперболических уравнений второго порядка: к данному решению задачи, зафиксированному внутри треугольника $\Delta A'B'C'$, можно присоединить вдоль характеристики, вообще говоря, различные решения, являющиеся его продолжением.

В области D_1 для уравнения (2.1) рассмотрим следующую задачу:

Задача 3.4. (Задача Дарбу). Найти в области D_1 решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad u_x|_{AB} = v(x), \quad u_{xy}|_{AB} = \mu(x), \quad u_{xx}|_{AB} = \chi(x). \quad (3.13)$$

Если в представлении (3.12) положим $x = 0$, то получим

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & \tau(y) - \int_0^y I \vartheta(0, y; \xi, \xi) \chi(\xi) + A_3(0, y; \xi) \mu(\xi) + \\ & + B_3(0, y; \xi) v(\xi) + C_3(0, y; \xi) \tau(\xi) / d\xi - \int_0^y d\xi \int_{\xi}^y \vartheta(0, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\eta \end{aligned}$$

или

$$\tau(y) - \int_0^y C_3(0, y; \xi) \tau(\xi) d\xi = \gamma(y), \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(y) = & \varphi(y) + \int_0^y I \vartheta(0, y; \xi, \xi) \chi(\xi) + A_3(0, y; \xi) \mu(\xi) + \\ & + B_3(0, y; \xi) v(\xi) / d\xi + \int_0^y d\xi \int_{\xi}^y \vartheta(0, y; \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Найдя $\tau(y)$ из уравнения (3.14) и подставляя ее в соотношение (3.12), получим решение задачи Дарбу (2.1), (3.13).

Т е о р е м а 3.4. Пусть выполняются условия (2.3) и

$$\varphi(y) \in C^2[0, h], \quad v(x), \quad \mu(x) \in C^1[0, h],$$

$$\chi(x) \in C[0, h], \quad f_1(x, y) \in C(\overline{D_1})$$

Тогда в области D_1 решение задачи 3.4 существует и единственно.

Следует заметить, что краевая задача

$$u(x, h) = \psi(x), \quad u_x|_{AB} = v(x), \quad u_{xy}|_{AB} = \mu(x), \quad u_{xy}|_{AB} = \chi(x)$$

для уравнения (2.1) не является правильно поставленной, так как любая функция, зависящая только от y и обращающаяся в нуль при $y = h$ является решением однородной задачи

$$u_{xyy} = 0, \quad u_x|_{AB} = 0, \quad u_{xy}|_{AB} = 0, \quad u_{xy}|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0.$$

Следовательно, характеристики $x = \text{const}, y = \text{const}$ не являются равноправными как носители граничных данных.

§ 3.3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$L_1(u) \equiv u_{xxyy} + a_1 u_{xxy} + b_1 u_{xx} + b_2 u_{xy} + b_3 u_{yy} + c_1 u_x + c_2 u_y + du = 0, \quad (3.15)$$

коэффициенты которого терпят разрывы первого рода при переходе через линию $x = x_0, 0 < x_0 < \ell$.

Задача 3.5. *Требуется найти решение уравнения (3.15) в области $D \setminus (x = x_0)$, удовлетворяющее начальным данным*

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad (3.16)$$

$$u(x, 0) = \psi_3(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_4(x), \quad x_0 \leq x \leq \ell, \quad (3.17)$$

краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(\ell, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3.18)$$

условиям сопряжения на линии разрыва коэффициентов

$$u(x_0 - 0, y) = u(x_0 + 0, y), \quad u_x(x_0 - 0, y) = u_x(x_0 + 0, y), \quad 0 \leq y \leq h \quad (3.19)$$

и условиям согласования

$$\begin{aligned} \psi_1^{(i)}(x_0) &= \psi_3^{(i)}(x_0) (i = 0, 1); \quad \psi_2(x_0) = \psi_4(x_0), \quad \psi_1(0) = \varphi_1(0), \\ \psi_2(0) &= \varphi_1'(0), \quad \psi_3(\ell) = \varphi_2(0), \quad \psi_4(\ell) = \varphi_2'(0). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Аналогичная задача для уравнения третьего порядка исследована в работе [146].

Имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{D}L_1(u) - uL_1^*(\mathcal{D}) &= [\mathcal{D}_{\eta\eta}u_\xi - \mathcal{D}_{\eta\eta\xi}u + (a_1\mathcal{D})_{\eta\xi}u - (a_1\mathcal{D})_\eta u_\xi + b_1\mathcal{D}u_\xi - \\ &- (b_1\mathcal{D})_\xi u - (b_2\mathcal{D})_\eta u + c_1u\mathcal{D}]_\xi - [\mathcal{D}_\eta u_{\xi\xi} - \mathcal{D}u_{\xi\xi\eta} - a_1\mathcal{D}u_{\xi\xi} - b_2\mathcal{D}u_\xi + \\ &+ (b_3\mathcal{D})_\eta u - b_3\mathcal{D}u_\eta - c_2u\mathcal{D}]_\eta, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где

$$L_1^*(\vartheta) \equiv \vartheta_{\xi\xi\eta\eta} - (a_1\vartheta)_{\xi\xi\eta} + (b_1\vartheta)_{\xi\xi} + (b_2\vartheta)_{\xi\eta} + \\ + (b_3\vartheta)_{\eta\eta} - (c_1\vartheta)_{\xi} - (c_2\vartheta)_{\eta} + d\vartheta.$$

Функции Римана $\vartheta = \vartheta_1(x, y; \xi, \eta)$ и $\vartheta = \vartheta_2(x, y; \xi, \eta)$ соответственно в областях $D_1 = D \cap (x < x_0)$, $D_2 = D \cap (x > x_0)$ будем определять из условий (см. главы II):

$$L_1^*(\vartheta_i) = 0, \quad (\xi, \eta) \in D_i, \quad i = 1, 2, \\ \vartheta_i(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = 0, \quad \vartheta_{i\xi}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = \omega_i(x, y; \eta), \\ \vartheta_i(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = 0, \quad \vartheta_{i\eta}(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = w_i(x, y; \xi), \quad (3.22)$$

где $\omega_i(x, y; \eta)$, $w_i(x, y; \xi)$, $(i = 1, 2)$ - решения следующих задач Коши:

$$\begin{cases} \vartheta_{i\xi\eta\eta}(x, y; x, \eta) - (-1)^i \frac{\partial}{\partial \eta} [a_1(x, y)\vartheta_{i\eta}(x, y; x, \eta)] + \\ + b_1(x, y)\vartheta_{i\eta}(x, y; x, \eta) = 0, \\ \vartheta_{i\xi}(x, y; x, \eta)|_{\eta=y} = 0, \quad \vartheta_{i\xi\eta}(x, y; x, \eta)|_{\eta=y} = 1, \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} \vartheta_{i\eta\xi\xi}(x, y; \xi, y) + b_3(\xi, y)\vartheta_{i\eta}(x, y; \xi, y) = 0, \\ \vartheta_{i\eta}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad \vartheta_{i\eta\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

Введем обозначения

$$u(x_0 - \theta, y) = u(x_0 + \theta, y) = \tau(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ u_x(x_0 - \theta, y) = u_x(x_0 + \theta, y) = \nu(y), \quad 0 \leq y \leq h. \quad (3.25)$$

Проинтегрируя тождество (3.21) по областям

$$D_1^* = \{(\xi, \eta): x < \xi < x_0, 0 < \eta < y\}, \quad D_2^* = \{(\xi, \eta): x_0 < \xi < x, 0 < \eta < y\}$$

и учитывая (3.22), убеждаемся, что решения задач Гурса для уравнения (3.15) с условиями (3.16), (3.25) и (3.17), (3.25) представимы в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & \mathfrak{G}_{i\eta\xi}(x, y; x_0, y)\tau(y) - \mathfrak{G}_{i\eta}(x, y; x_0, y)\nu(y) - \\
 & - \int_0^y \{ \mathfrak{G}_{i\xi\eta\eta}(x, y; x_0, \eta) - [a_1(x_0, \eta)\mathfrak{G}_i(x, y; x_0, \eta)]_{\xi\eta} + \\
 & + [b_1(x_0, \eta)\mathfrak{G}_i(x, y; x_0, \eta)]_{\xi} + [b_2(x_0, \eta)\mathfrak{G}_i(x, y; x_0, \eta)]_{\eta} + \\
 & + c_1(x_0, \eta)\mathfrak{G}_i(x, y; x_0, \eta) \} \tau(\eta) d\eta + \int_0^y \mathfrak{G}_{i\eta\eta}(x, y; x_0, \eta) - \\
 & - [a_1(x_0, \eta)\mathfrak{G}_i(x, y; x_0, \eta)]_{\eta} + \\
 & + b_1(x_0, \eta)\mathfrak{G}_i(x, y; x_0, \eta) \} \nu(\eta) d\eta + F_i(x, y), \quad (x, y) \in D_i,
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

где $F_i(x, y)$, $i = 1, 2$ – заданные функции, выражающиеся через данные задачи и функцией Римана $\mathfrak{G}_i(x, y; \xi, \eta)$. Из леммы 2.1 следует, что если

$\forall (x, y) \in \bar{D}_i : b_3(\xi, \eta) \leq 0$, то функции $\mathfrak{G}_1(x, y; \xi, \eta)$ и $\mathfrak{G}_2(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} \forall \xi \in (0, x_0] : \mathfrak{G}_{1\eta}(0, y; \xi, y) > 0, & \mathfrak{G}_{1\eta\xi}(0, y; \xi, y) > 1; \\ \forall \xi \in [x_0, \ell) : \mathfrak{G}_{2\eta}(\ell, y; \xi, y) > 0, & \mathfrak{G}_{2\eta\xi}(\ell, y; \xi, y) > 1. \end{cases} \tag{3.27}$$

Полагая $x = 0$ и $x = \ell$ в (3.26), имеем

$$\begin{cases} \mathfrak{G}_{1\eta\xi}(0, y; x_0, y)\tau(y) - \mathfrak{G}_{1\eta}(0, y; x_0, y)\nu(y) - \int_0^y A_1(y, \eta)\tau(\eta) d\eta + \\ + \int_0^y B_1(y, \eta)\nu(\eta) d\eta = \Phi_1(y), \\ \mathfrak{G}_{2\eta\xi}(\ell, y; x_0, y)\tau(y) - \mathfrak{G}_{2\eta}(\ell, y; x_0, y)\nu(y) - \int_0^y A_2(y, \eta)\tau(\eta) d\eta + \\ + \int_0^y B_2(y, \eta)\nu(\eta) d\eta = \Phi_2(y), \end{cases} \tag{3.28}$$

где $A_i(y, \eta)$, $B_i(y, \eta)$, $\Phi_i(y)$ – заданные функции. Исключая $\tau(y)$ из (3.28), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & [\mathfrak{G}_{2\eta}(\ell, y; x_0, y) \mathfrak{G}_{1\eta\xi}(\theta, y; x_0, y) - \mathfrak{G}_{1\eta}(\theta, y; x_0, y) \mathfrak{G}_{2\eta\xi}(\ell, y; x_0, y)] \times \\ & \times v(y) = \Phi(y) + \int_0^y K(y, s) v(s) ds, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$\Phi(y)$, $K(y, s)$ - известные функции.

В силу неравенства (3.27) заключаем, что

$$\mathfrak{G}_{2\eta}(\ell, y; x_0, y) \mathfrak{G}_{1\eta\xi}(\theta, y; x_0, y) - \mathfrak{G}_{1\eta}(\theta, y; x_0, y) \mathfrak{G}_{2\eta\xi}(\ell, y; x_0, y) < 0.$$

Следовательно, уравнение (3.29) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Определив отсюда $v(y)$, можно найти $\tau(y)$ из уравнения (3.28), тем самым полностью найдем решение задачи 3.5 в областях D_i по формуле (3.26).

Т е о р е м а 3.5. *Если выполнены условия:*

$$a_1, b_j \in C^2(D_i), a_{1,xy} \in C(D_i), c_i \in C^1(D_i), d \in C(\bar{D}_i),$$

$$\forall (x, y) \in D_i : b_3(x, y) \leq 0; \psi_i \in C^2[0, x_0], \psi_k \in C^2[x_0, \ell], \varphi_i \in C^2[0, h],$$

$$\psi_1^{(i-1)}(x_0) = \psi_3^{(i-1)}(x_0), \psi_2(x_0) = \psi_4(x_0), \psi_1(0) = \varphi_1(0),$$

$$\psi_2(0) = \varphi_1'(0), \psi_3(\ell) = \varphi_2(0), \psi_4(\ell) = \varphi_2'(0), i = 1, 2; j = 1, 2, 3; k = 3, 4,$$

то решение задачи 3.5 в областях D_1 и D_2 существует и единственно.

ГЛАВА IV. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В этой главе рассматриваются начально-краевые задачи для смешанно-гиперболических, смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка. Здесь под смешанно-гиперболическим уравнением подразумевается гиперболическое уравнение четвертого порядка, имеющее действительные характеристики с различным кратностями в разных частях рассматриваемой области. Изучение таких уравнений, заданных на границе раздела с некоторыми условиями сопряжения, диктуется с резко отличающимися физическими свойствами рассматриваемой среды.

§ 4.1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННО – ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ЛИНИЕЙ СОПРЯЖЕНИЯ $y=0$

Пусть D означает прямоугольник, с вершинами

$$A_0(0, h), A_1(0, -h_1), B(\ell, -h_1), B_0(\ell, h) \quad (h, h_1, \ell > 0),$$

а $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$. Введем класс функций

$$M_4 = \{u(x, y) : u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D), u \in C^2(D_1),$$

$$u_{xxu}, u_{xyu}, u_{xxy} \in C(D_1), u_{xx}, u_{xy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xxxy} \in C(D_2)\},$$

Задача 4.1. Найти функцию $u(x, y)$ из класса M_4 , удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$\begin{aligned} &u_{xxuy} + a_1(x, y)u_{xxu} + a_2(x, y)u_{xyu} + b_1(x, y)u_{xx} + b_2(x, y)u_{xy} + \\ &+ b_3(x, y)u_{yy} + c_1(x, y)u_x + c_2(x, y)u_y + d(x, y)u = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

и граничным условиям

$$u(0, y) = \tau_2(y), \quad u_x(0, y) = v_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4.2)$$

$$u(x, h) = \varphi_I(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (4.3)$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$\begin{aligned} u_{xxxy} + \alpha_1(x, y)u_{xxx} + \alpha_2(x, y)u_{xxy} + \beta_1(x, y)u_{xx} + \\ + \beta_2(x, y)u_{xy} + \gamma_1(x, y)u_x + \gamma_2(x, y)u_y + \delta(x, y)u = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

и граничным условиям

$$u(0, y) = \chi_1(y), \quad u_x(0, y) = \chi_2(y), \quad u_{xx}(0, y) = \chi_3(y), \quad -h_1 \leq y \leq 0, \quad (4.5)$$

где $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2$), b_j, χ_j ($j = \overline{1, 3}$),

$\tau_2, v_2, d, \delta, \psi_1$ – заданные функции, причем

$$\tau_2(0) = \chi_1(0), \quad v_2(0) = \chi_2(0), \quad \tau_2(h) = \psi_1(0). \quad (4.6)$$

Отметим, что прямые $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ являются двукратными характеристиками уравнения (4.1), а для уравнения (4.4) прямая $y = \text{const}$ является трехкратной, прямая $x = \text{const}$ – простой характеристикой (см. главу I). Таким образом, уравнение (4.1) в области D_1 имеет два двукратных характеристик, а уравнение (4.4) в области D_2 имеет одну трехкратную и одну простую характеристику, поэтому уравнения (4.1) и (4.4) в области D , назовем смешанно-гиперболическими.

В силу постановки задачи 4.1 введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} u(x, +0) = u(x, -0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ u_y(x, -0) = u_{y_1}(x, -0) = v_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\tau_1(x), v_1(x)$ – пока неизвестные функции.

Если рассмотрим задачу Гурса для уравнения (4.1) с условиями (4.2) и (4.7), то согласно результатами § 2.1 для решения этой задачи имеем следующее представление:

$$\begin{aligned} u(x, y) = A_I(x, y)\tau_2(y) - \mathcal{G}_\eta(x, y; \theta, y)v_2(y) + \\ + \int_0^y [B_I(x, y; \eta)v_2(\eta) - C_I(x, y; \eta)\tau_2(\eta)]d\eta - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^x / \mathcal{G}(x, y; \xi, 0) v_1''(\xi) - D_1(x, y; \xi) \tau_1''(\xi) + \\
 & + a_2(\xi, 0) \mathcal{G}(x, y; \xi, 0) v_1'(\xi) - E_1(x, y; \xi) \tau_1'(\xi) + \\
 & + b_3(\xi, 0) \mathcal{G}(x, y; \xi, 0) v_1(\xi) - F_1(x, y; \xi) \tau_1(\xi) / d\xi,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

здесь функции $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ - определены в § 2.1, а $\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана для уравнения (4.1).

Используя условие (4.3) из (4.8), получаем соотношение для функции $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$, принесенное из области D_1 :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^x / \mathcal{G}(x, h; \xi, 0) v_1''(\xi) - D_1(x, h; \xi) \tau_1''(\xi) + \\
 & + a_2(\xi, 0) \mathcal{G}(x, h; \xi, 0) v_1'(\xi) - E_1(x, h; \xi) \tau_1'(\xi) + \\
 & + b_3(\xi, 0) \mathcal{G}(x, h; \xi, 0) v_1(\xi) - F_1(x, h; \xi) \tau_1(\xi) / d\xi = \Phi(x),
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi(x) = & A_1(x, h) \varphi_1(h) - \mathcal{G}_\eta(x, h; 0, h) \varphi_2(h) + \\
 & + \int_0^h / B_1(x, h; \eta) \varphi_2(\eta) - C_1(x, h; \eta) \varphi_1(\eta) / d\eta.
 \end{aligned}$$

Осуществляя интегрирование по частям в (4.9), учитывая свойства функции $\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)$ и условия согласования

$$\begin{aligned}
 \tau_1(0) = \varphi_1(0), \quad \tau_1'(0) = \varphi_2(0), \quad \tau_1''(0) = \chi_3(0), \quad v_1(0) = \varphi_1'(0), \\
 v_1'(0) = \varphi_2'(0), \quad v_1''(0) = \chi_3'(0),
 \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
 D_{1\xi}(x, h; x) \tau_1(x) - \mathcal{G}_\xi(x, h; x, 0) v_1(x) = & \int_0^x H_1(x, \xi) \tau_1(\xi) d\xi + \\
 & + \int_0^x H_2(x, \xi) v_1(\xi) d\xi + \Phi_1(x),
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$H_1(x, \xi) = D_{1\xi\xi}(x, h; \xi) - E_{1\xi}(x, h; \xi) + F_1(x, h; \xi),$$

$$H_2(x, \xi) = a_{1\xi}(\xi, 0)\vartheta(x, h; \xi, 0) + a_2(\xi, 0)\vartheta_\xi(x, h; \xi, 0) - \\ - \vartheta_{\xi\xi}(x, h; \xi, 0) - b_3(\xi, 0)\vartheta(x, h; \xi, 0),$$

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) + \vartheta(x, h; 0, 0)\chi_2'(0) - \vartheta_\xi(x, h; 0, 0)\chi_1'(0) - \\ - D_1(x, h; 0)\chi_2(0) + D_{1\xi}(x, h; 0)\chi_1(0) + a_2(0, 0)\vartheta(x, h; 0, 0)\chi_1'(0) - \\ - E_1(x, h; 0)\chi_1(0).$$

С другой стороны, с учетом постановки 4.1 и устремляя y к нулю, из уравнения (4.4) получаем

$$v_1'''(x) + \alpha_1(x, 0)\tau_1'''(x) + \alpha_2(x, 0)v_1''(x) + \beta_1(x, 0)\tau_1''(x) + \\ + \beta_2(x, 0)v_1'(x) + \gamma_1(x, 0)\tau_1(x) + \gamma_2(x, 0)v_1(x) + \delta(x, 0)\tau_1(x) = 0.$$

Интегрируя это уравнение и используя вышеуказанные условия согласования, имеем

$$v_1(x) + \alpha(x, 0)\tau_1(x) = \\ = \int_0^x H_3(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \int_0^x H_4(x, \xi)v_1(\xi)d\xi + g_1(x), \quad (4.11)$$

где

$$H_3(x, \xi) = 2\alpha_{1\xi}(\xi, 0) - \beta_1(\xi, 0) + (x - h)[2\beta_\xi(\xi, 0) - 3\alpha_{\xi\xi}(\xi, 0) - \\ - \gamma_1(\xi, 0)] + \frac{1}{2}(x - \xi)^2[\alpha_{1\xi\xi\xi}(\xi, 0) - \beta_{1\xi\xi}(\xi, 0) + \gamma_{1\xi}(\xi, 0) - \delta(\xi, 0)],$$

$$H_4(x, \xi) = \alpha_2(\xi, 0) + (x - \xi)[2\alpha_{2\xi}(\xi, 0) - \beta_2(\xi, 0)] + \\ + \frac{1}{2}(x - \xi)^2[\beta_{2\xi}(\xi, 0) - \alpha_{2\xi\xi}(\xi, 0) - \gamma(\xi, 0)],$$

$$g_1(x) = \chi_1'(0) + \alpha_1(0, 0)\chi_1(0) + x\{[\beta_1(0, 0) - 2\alpha_{1x}(0, 0)]\chi_1(0) +$$

$$+ \alpha_1(0, 0)\chi_2(0) + \alpha_2(0, 0)\chi_1'(0) + \chi_2'(0)\} + \frac{1}{2}x^2\{[\alpha_{1xx}(0, 0) - \beta_{1x}(0, 0) +$$

$$+ \gamma_1(0,0) [\chi_1(0) + [\beta_1(0,0) - \alpha_{1x}(0,0)] \chi_2(0) + \alpha_1(0,0) \chi_3(0) + \\ + [\beta_2(0,0) - \alpha_{2x}(0,0)] \chi'_1(0) + \alpha_2(0,0) \chi'_2(0) + \chi'_3(0) \}.$$

Обращая интегральное уравнение (4.11) относительно $v_1(x)$, приходим к следующему соотношению

$$v_1(x) = -\alpha_1(x,0) \tau_1(x) + \int_0^x H_5(x,\xi) \tau_1(\xi) d\xi + g_2(x), \quad (4.12)$$

где

$$H_5(x,\xi) = H_3(x,\xi) - \alpha_1(\xi,0) R(x,\xi) + \int_{\xi}^x R(x,\xi_1) H_3(\xi_1,\xi) d\xi,$$

$$g_2(x) = g_1(x) + \int_0^x R(x,\xi) g_1(\xi) d\xi,$$

а $R(x,\xi)$ - резольвента ядра $H_4(x,\xi)$.

Исключая $v_1(x)$ из соотношений (4.10) и (4.12), для $\tau_1(x)$ имеем интегральное уравнение

$$\rho(x) \tau_1(x) = \int_0^x K(x,\xi) \tau_1(\xi) d\xi + g(x), \quad (4.13)$$

где

$$\rho(x) = 1 + \alpha_1(x,0) \vartheta_{\xi}(x,h;x,0) + \int_0^h b_1(x,\eta) \vartheta_{\xi}(x,h;x,\eta) d\eta, \quad (4.14)$$

$$K(x,\xi) = H_1(x,\xi) - \alpha_1(\xi,0) H_2(x,\xi) + \vartheta_{\xi}(x,h;x,0) H_5(x,\xi) + \\ + \int_{\xi}^x H_2(x,\xi_1) H_5(\xi_1,\xi) d\xi_1,$$

$$g(x) = \Phi_1(x) + \vartheta_{\xi}(x,h;x,0) g_2(x) + \int_0^x H_2(x,\xi) g_2(\xi) d\xi.$$

Нетрудно заметить, что если

$$\forall x \in [0, \ell] : \rho(x) \neq 0, \quad (4.15)$$

то интегральное уравнение (4.13) допускает единственное решение.

В частности, при $\alpha_1(x, 0) = 0$, $b_1(x, y) = 0$ имеем, что $\rho(x) = 1$, следовательно, условие (4.15) выполняется.

Поступая так же, как в лемме 2.1, убеждаемся, что если

$$\forall (x, y) \in \overline{D_1} : b_1(x, y) - a_{1y}(x, y) \leq 0, \quad (4.16)$$

то

$$\forall \eta \in [0, h) : \mathcal{G}_\xi(x, y; x, \eta) < 0. \quad (4.17)$$

Тогда нетрудно заметить, что если

$$\forall (x, y) \in \overline{D_1} : b_1(x, y) \leq 0, \forall x \in [0, \ell] : \alpha_1(x, 0) \leq 0, \quad (4.18)$$

то

$$\forall x \in [0, \ell] : \rho(x) \geq 1.$$

Следовательно, при выполнении условий (4.16) и (4.18) интегральное уравнение (4.13) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив $\tau_1(x)$ из уравнения (4.13), будем знать и $v_1(x)$. Тогда решение задачи 4.1 в области D_1 имеет вид (4.8), а в области D_2 определяется по формуле

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \mathcal{G}_{I\xi\xi}(x, y; x, 0)\tau_1(x) + \int_0^x A_3(x, y; \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \\ & + \int_0^y [\mathcal{G}_I(x, y; 0, \eta)\chi_3'(\eta) + \alpha_1(0, \eta)\mathcal{G}_I(x, y; 0, \eta)\chi_3(\eta) - B_3(x, y; \eta)\chi_2'(\eta) + \\ & + C_3(x, y; \eta)\chi_3(\eta) + D_3(x, y; \eta)\chi_1'(\eta) + E_3(x, y; \eta)\chi_1(\eta)]d\eta, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\mathcal{G}_I(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана уравнения (4.4), а A_3, B_3, C_3, D_3 и E_3 определены в § 2.3.

Теорема 4.1. *Если коэффициенты уравнений (4.1) и (4.4) удовлетворяют условиям (2.3), (2.31), (4.16), (4.18), а для заданных функций выполняются условия (4.6) и*

$$\tau_2, v_2 \in C^2[0, h], \psi_1 \in C^2[0, \ell], \tau_1 \in C^3[0, \ell],$$

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in C^1[-h_1, 0],$$

то решение задачи 4.1 существует, единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (4.8) и (4.19) соответственно.

Аналогично исследуются следующие задачи.

З а д а ч а 4.2. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи 4.1, если вместо условия (4.2) берется условие*

$$u_y(x, h) + \theta(x)u(x, h) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

где $\theta(x), \psi(x)$ - заданные функции.

З а д а ч а 4.3. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи 4.1, если одно из условий (4.1) заменяется на условие*

$$u(\ell, y) = \chi_4(y), \quad -h_1 \leq y \leq 0,$$

где $\chi_4(y)$ - заданная функция.

§ 4.2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СМЕШАННО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ЛИНИЕЙ СОПРЯЖЕНИЯ $x=0$

Пусть D - означает прямоугольник, с вершинами $A_2(-\ell_1, 0), B(\ell, 0), B_0(\ell, h), B_2(-\ell_1, h)$ ($\ell_1, \ell, h > 0$), а $D_1 = D \cap (x > 0), D_3 = D \cap (x < 0), AA_0 = \{(x, y): x = 0, 0 < y < h\}$.

Введем класс функций M_5 , где

$$M_5 = \left\{ u(x, y) : u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D), u_{xx} \in C(D), \right. \\ \left. u_{xy}, u_{yx}, u_{xxy} \in C(D_1 \cup AA_0), u_{xy}, u_{xxy} \in C(D_3 \cup AA_0), \right. \\ \left. u_{xxx}, u_{xxxy} \in C(D_3) \right\}.$$

З а д а ч а 4.4. Найти функцию $u(x, y)$ из класса M_5 , удовлетворяющую в области D_1 уравнению (4.1) и граничным условиям

$$u(x, 0) = \tau_1(x), u_y(x, 0) = v_1(x), 0 \leq x \leq \ell, \quad (4.20)$$

удовлетворяющую в области D_3 уравнению (4.4) и граничным условиям

$$u(x, 0) = \psi_3(x), -\ell_1 \leq x \leq 0, \quad (4.21)$$

$$u(-\ell_1, y) = \varphi_1(y), u_x(-\ell_1, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq h, \quad (4.22)$$

где $\tau_1, v_1, \psi_3, \varphi_1, \varphi_2$ - заданные гладкие функции, причем

$$\tau_1(0) = \psi_3(0), \tau_1'(0) = \psi_3'(0), \tau_1''(0) = \psi_3''(0), \\ \varphi_1(0) = \psi_3(-\ell_1), \varphi_2(0) = \psi_3'(-\ell_1). \quad (4.23)$$

В силу постановки задачи 4.4 введем следующие обозначения

$$u(-0, y) = u(+0, y) = \tau_2(y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y) = v_2(y), \\ u_{xx}(-0, y) = u_{xx}(+0, y) = \mu_2(y), 0 \leq y \leq h. \quad (4.24)$$

Тогда, устремляя x к нулю справа из уравнения (4.1) имеем

$$\mu_2''(y) + a_1(0, y)\mu_2'(y) + a_2(0, y)v_2''(y) + b_1(0, y)\mu_2(y) +$$

$$+ b_2(\theta, y)v_2'(y) + b_3(\theta, y)\tau_2''(y) + c_1(\theta, y)v_2(y) + \\ + c_2(\theta, y)\tau_2'(y) + d(\theta, y)\tau_2(y) = 0.$$

Интегрируя дважды это уравнение и учитывая условия согласования, имеем

$$\mu_2(y) + a_2(\theta, y)v_2(y) + b_3(\theta, y)\tau_2(y) + \\ + \int_0^y [k_{11}(y, \eta)\mu_2(\eta) + k_{12}(y, \eta)v_2(\eta) + k_{13}(y, \eta)\tau_2(\eta)]d\eta = g_1(y), \quad (4.25)$$

где

$$k_{11}(y, \eta) = a_1(\theta, \eta) - (y - \eta)[a_{1\eta}(\theta, \eta) - b_1(\theta, \eta)], \\ k_{12}(y, \eta) = b_2(\theta, \eta) - 2a_{2\eta}(\theta, \eta) + (y - \eta)[a_{2\eta\eta}(\theta, \eta) - b_{2\eta}(\theta, \eta) + c_1(\theta, \eta)], \\ k_{13}(y, \eta) = c_2(\theta, \eta) - 2b_{3\eta}(\theta, \eta) + (y - \eta)[b_{3\eta\eta}(\theta, \eta) - c_{2\eta}(\theta, \eta) + d(\theta, \eta)], \\ g_1(y) = \tau_1''(\theta) + a_2(\theta, \theta)\tau_1'(\theta) + b_3(\theta, \theta)\tau_1(\theta) - b_{3y}(\theta, \theta)\tau_1(\theta) + \\ + \left[v_1''(\theta) + a_1(\theta, \theta)\tau_1''(\theta) + a_2(\theta, \theta)v_1'(\theta) - a_{2\eta}(\theta, \theta)\tau_1'(\theta) + \right. \\ \left. + b_2(\theta, \theta)\tau_1'(\theta) + b_3(\theta, \theta)v_1(\theta) + c_2(\theta, \theta)v_1(\theta) \right]y.$$

Теперь выпишем решение уравнения (4.4), удовлетворяющее условиям (4.21), (4.24) (см. § 2.3 главы II)

$$u(x, y) = \Psi_3(x, y) + \int_0^y [\mathcal{G}(x, y; \theta, \eta)\mu_2'(\eta) + \alpha_1(\theta, \eta)\mathcal{G}(x, y; \theta, \eta)\mu_2(\eta) - \\ - B_4(x, y; \eta)v_2'(\eta) - C_4(x, y; \eta)v_2(\eta) + D_4(x, y; \eta)\tau_2'(\eta) + \\ + E_4(x, y; \eta)\tau_2(\eta)]d\eta, \quad (4.26)$$

где $\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана уравнения (4.4), а

$$\Psi_3(x, y) = \mathcal{G}_{\xi\xi}(x, y; x, \theta)\psi_3(x) - \int_0^x A_4(x, y; \xi)\psi_3(\xi)d\xi.$$

Удовлетворяя (4.26) условиям (4.22), будем иметь

$$\begin{aligned} & \mathfrak{G}(-\ell_1, y; \theta, y) \mu_2(y) - B_4(-\ell_1, y, y) v_2(y) + D_4(-\ell_1, y, y) \tau_2(y) + \\ & + \int_0^y [k_{21}(y, \eta) \mu_2(\eta) + k_{22}(y, \eta) v_2(\eta) + k_{23}(y, \eta) \tau_2(\eta)] d\eta = g_2(y), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{G}_x(-\ell_1, y; \theta, y) \mu_2(y) - B_{4x}(-\ell_1, y, y) v_2(y) + D_{4x}(-\ell_1, y, y) \tau_2(y) + \\ & + \int_0^y [k_{31}(y, \eta) \mu_2(\eta) + k_{32}(y, \eta) v_2(\eta) + k_{33}(y, \eta) \tau_2(\eta)] d\eta = g_3(y), \end{aligned} \quad (4.28)$$

где

$$\begin{aligned} k_{21}(y, \eta) &= -\mathfrak{G}_\eta(-\ell_1, y; \theta, \eta) + \alpha_1(\theta, \eta) \mathfrak{G}(-\ell_1, y; \theta, \eta), \\ k_{22}(y, \eta) &= B_{4\eta}(-\ell_1, y, \eta) - C_4(-\ell_1, y, \eta), \\ k_{23}(y, \eta) &= E_4(-\ell_1, y, \eta) - D_{4\eta}(-\ell_1, y, \eta), \\ k_{31}(y, \eta) &= -\mathfrak{G}_{\eta x}(-\ell_1, y; \theta, \eta) + \alpha_1(\theta, \eta) \mathfrak{G}_x(-\ell_1, y; \theta, \eta), \\ k_{32}(y, \eta) &= B_{4\eta x}(-\ell_1, y, \eta) - C_{4x}(-\ell_1, y, \eta), \\ k_{33}(y, \eta) &= E_{4x}(-\ell_1, y, \eta) - D_{4\eta x}(-\ell_1, y, \eta), \\ g_2(y) &= \varphi_1(y) - \Psi_3(-\ell_1, y) + D_4(-\ell_1, y, \theta) \tau_1(\theta) + \\ & + \mathfrak{G}(-\ell_1, y; \theta, \theta) \psi_3''(\theta) - B_4(-\ell_1, y, \theta) \psi_3'(\theta), \\ g_3(y) &= \varphi_2(y) - \Psi_{3x}(-\ell_1, y) + \mathfrak{G}_x(-\ell_1, y; \theta, \theta) \psi_3''(\theta) - \\ & - B_{4x}(-\ell_1, y, \theta) \psi_3'(\theta) - D_{4x}(-\ell_1, y, \theta) \psi_3(\theta). \end{aligned}$$

Уравнения (4.25), (4.27), (4.28) представляют собой систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода и допускают единственное решение, если выполняется условие

$$\begin{vmatrix} 1 & a_2(\theta, y) & b_3(\theta, y) \\ \mathfrak{G}(-\ell_1, y; \theta, \eta) & -B_4(-\ell_1, y, y) & D_4(-\ell_1, y, y) \\ \mathfrak{G}_x(-\ell_1, y; \theta, \eta) & -B_{4x}(-\ell_1, y, y) & D_{4x}(-\ell_1, y, y) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.29)$$

Определив из системы уравнений (4.25), (4.27), (4.28) функций $\tau_2(y)$, $v_2(y)$, $\mu_2(y)$ убеждаемся в том, что решение задачи (4.4) в обла-

сти D_1 представимо в виде (4.8), а в области D_3 определяется по формуле (4.26).

Теорема 4.2. Если $\tau_1, v_1 \in C^2[0, \ell]$, $\psi_3 \in C^3[-\ell_1, 0]$,

$\varphi_1, \varphi_2 \in C^2[0, h]$ и выполняются условия (2.3), (2.31), (4.23), (4.29), то задача 4.4 имеет единственное решение.

Введем класс функций M_6 , где

$$\begin{aligned} M_6 = \{ u(x, y) : u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D), u_{xy} \in C(D_1 \cup AA_0), \\ u_{xx}, u_{xxy}, u_{xxyy} \in C(D_1), u_{xy}, u_{xx}, u_{xxy} \in C(D_3 \cup AA_0), \\ u_{xxx}, u_{xxxxy} \in C(D_3) \}, \end{aligned}$$

Задача 4.5. Найти функцию $u(x, y)$ из класса M_6 , удовлетворяющее в области D_1 уравнению (4.1), граничным условиям (4.20) и

$$u(\ell, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4.30)$$

удовлетворяющее в области D_3 уравнению (4.4), граничным условиям (4.21) и (4.22), где $\tau_1, v_1, \psi_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - заданные гладкие функции, причем

$$\begin{aligned} \tau_1(0) = \psi_3(0), \quad \tau_1'(0) = \psi_3'(0), \quad \varphi_1(0) = \psi_3(-\ell_1), \\ \varphi_2(0) = \psi_3'(-\ell_1), \quad \varphi_3(0) = \tau_1(\ell), \quad \varphi_3(0) = v_1(\ell). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Отметим, что в задаче 4.5, в отличие от задачи 4.4, выполняются следующие условия сопряжения

$$\begin{aligned} u(-0, y) = u(+0, y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ u_x(-0, y) = u_x(+0, y), \quad 0 \leq y \leq h. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} u(-0, y) = u(+0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ u_x(-0, y) = u_x(+0, y) = v_2(y), \quad 0 \leq y \leq h; \end{aligned} \quad (4.32)$$

здесь $\tau_2(y), v_2(y)$ - пока неизвестные функции.

Выписывая решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условиям (4.20), (4.32) в виде (4.8) и используя условие (4.30), имеем

$$A_1(\ell, y)\tau_2(y) - \mathcal{G}_\eta(\ell, y; 0, y)v_2(y) + \int_0^y [B_1(\ell, y; \eta)v_2(\eta) - C_1(\ell, y; \eta)\tau_2(\eta)]d\eta = \Phi_3(y), \quad (4.33)$$

где

$$\Phi_3(y) = \varphi_3(y) + \int_0^\ell [\mathcal{G}(\ell, y; \xi, 0)v_1''(\xi) - D_1(\ell, y; \xi)\tau_1''(\xi) + a_2(\xi, 0)\mathcal{G}(\ell, y; \xi, 0)v_1'(\xi) - E_1(\ell, y; \xi)\tau_1'(\xi) + b_3(\xi, 0)\mathcal{G}(\ell, y; \xi, 0)v_1(\xi) - F_1(\ell, y; \xi)\tau_1(\xi)]d\xi.$$

Пусть $u_{xx}(0, y) = \mu_2(y)$, где $\mu_2(y)$ - неизвестная функция. Тогда рассуждая так же, как в задаче 4.4, убеждаемся в том, что соотношения между функциями $\tau_2(y)$, $v_2(y)$, $\mu_2(y)$, принесенные из области D_3 имеют вид (4.27) и (4.28). Поэтому система уравнений (4.28), (4.27), (4.33) представляет собой систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода и при выполнении условий

$$\begin{vmatrix} 0 & -\mathcal{G}_\eta(-\ell_1, y; 0, y) & A_1(\ell, y) \\ \mathcal{G}(-\ell_1, y; 0, y) & -B_4(-\ell_1, y, y) & D_4(-\ell_1, y, y) \\ \mathcal{G}_x(-\ell_1, y; 0, y) & -B_{4x}(-\ell_1, y, y) & D_{4x}(-\ell_1, y, y) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.34)$$

допускает единственное решение.

Итак, имеет место

Т е о р е м а 4.3. Если $\tau_1, v_1 \in C^2[0, \ell]$, $\psi_3 \in C^3[-\ell_1, 0]$,

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^2[0, h]$ и выполняются условия (2.3), (2.31), (4.31), (4.34),

то задача 4.5 имеет единственное решение.

§ 4.3. КРАЕВЫЕ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пусть D, D_1, D_2 - прямоугольники, описанные в § 4.1. Введем класс функций M_7 , где

$$M_7 = \{u(x, y) : u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D), u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xxxx} \in C(D_1 \cup AB), u_{xx}, u_{xy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xxxy} \in C(D_2 \cup AB)\}.$$

З а д а ч а 4.6. Найти функцию $u(x, y)$ из класса M_7 , удовлетворяющее в области D_1 уравнению

$$u_{xxxx} - u_{xxy} + au_{xx} + bu_x + cu = 0, \quad (4.35)$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \tau_2(y), \quad u_x(0, y) = \nu_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ u(\ell, y) &= \varphi_1(y), \quad u_x(\ell, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \end{aligned} \quad (4.36)$$

удовлетворяющее в области D_2 уравнению (4.4) и граничным условиям (4.5), где

$a, b, c, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i = 1, 2), \delta, \tau_i, \varphi_i (i = 1, 2), \chi_i (= 1, 2, 3)$ - заданные функции, причем $\tau_2(0) = \chi_1(0), \tau_2'(0) = \chi_1'(0), \nu_2(0) = \chi_2(0)$. Здесь $AB = \{(x, y) : y = 0, 0 < x < \ell\}$.

Из постановки задачи 4.6 следует, что на линии AB должно быть выполнено условия сопряжения

$$\begin{aligned} u(x, -0) &= u(x, +0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ u_y(x, -0) &= u_y(x, +0) = \nu_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Тогда, устремляя y к нулю из уравнений (4.35) и (4.4), имеем

$$\tau_1^{(4)}(x) - \nu_1''(x) + a(x, 0)\tau_1''(x) + b(x, 0)\tau_1'(x) + c_1(x, 0)\tau_1(x) = 0, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \nu_1'''(x) + \alpha_1(x, 0)\tau_1'''(x) + \alpha_2(x, 0)\nu_1''(x) + \beta_1(x, 0)\tau_1''(x) + \\ + \beta_2(x, 0)\nu_1'(x) + \gamma_1(x, 0)\tau_1'(x) + \gamma_2(x, 0)\nu_1(x) + \delta(x, 0)\tau_1(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Интегрируя уравнения (4.39) и используя условия согласования как и в § 4.1 получим (4.12). Тогда из (4.38) приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \tau_I^{(4)}(x) + a^*(x)\tau_I''(x) + b^*(x)\tau_I'(x) + c^*(x)\tau_I(x) = \\ = \int_0^x H^*(x, \xi)\tau_I(\xi)d\xi + g^*(x), \end{aligned} \quad (4.40)$$

где

$$\begin{aligned} a^*(x) &= \alpha_I(x, \theta) + b(x, \theta), \quad b^*(x) = b(x, \theta) - H_5(x, x) + 2\alpha_{Ix}(x, \theta), \\ c^*(x) &= c(x, \theta) - 2H_{5x}(x, x) - H_{5\xi}(x, x) + \alpha_{Ixx}(x, \theta), \\ H^*(x, \xi) &= H_{5xx}(x, \xi), \quad g^*(x) = g_2''(x). \end{aligned}$$

Из постановки задачи 4.6 для уравнения (4.40) получаем следующие краевые условия

$$\tau_I(\theta) = \chi_I(\theta), \tau_2'(\theta) = \chi_2(\theta), \tau_2(\ell) = \varphi_I(\theta), \tau_2'(\ell) = \varphi_2(\theta). \quad (4.41)$$

Если введем новую неизвестную функцию $T(x)$ по формуле

$$\tau(x) = T(x) + k_1x^3 + k_2x^2 + k_3x + k_4,$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\ell^3} [\ell\varphi_2(\theta) - 2\varphi_I(\theta) + 2\chi_I(\theta) + \ell\chi_2(\theta)], \quad k_3 = \chi_2(\theta), \\ k_2 &= \frac{1}{\ell^2} [3\varphi_I(\theta) - 3\chi_I(\theta) + \ell\varphi_2(\theta) - 2\ell\chi_2(\theta)], \quad k_4 = \chi_I(\theta), \end{aligned}$$

то уравнение (4.40) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} T^{(4)}(x) + a^*(x)T''(x) + b^*(x)T'(x) + c^*(x)T(x) = \\ = \int_0^x H^*(x, \xi)T(\xi)d\xi + \tilde{g}(x), \end{aligned} \quad (4.42)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) = & g^*(x) - 2(3k_1x + k_2)b^*(x) - (3k_1x^2 + 2k_2x + k_3)b^*(x) - \\ & - (k_1x^3 + 2k_2x^2 + k_3x + k_4)c^*(x) + \int_0^x H^*(x, \xi)(k_1\xi^3 + 2k_2\xi^2 + k_3\xi + k_4)d\xi, \end{aligned}$$

а краевые условия примут вид

$$T(0) = 0, \quad T'(0) = 0, \quad T(\ell) = 0, \quad T'(\ell) = 0. \quad (4.43)$$

Как известно [77], если краевая задача для уравнения

$$T^{(4)}(x) + a^*(x)T''(x) + b^*(x)T'(x) + c^*(x)T(x) = 0 \quad (4.44)$$

с однородными условиями (4.43) имеет только тривиальное решение, то существует единственная функция Грина $G(x, \xi)$, и краевая задача (4.42), (4.43) эквивалентно сводится к решению интегрального уравнения

$$T(x) = \int_0^\ell K(x, \xi)T(\xi)d\xi + g_1(x), \quad (4.45)$$

где

$$K(x, \xi) = \int_\xi^\ell G(x, \xi_1)H^*(\xi_1, \xi)d\xi_1, \quad g_1(x) = \int_0^\ell G(x, \xi)\tilde{g}(\xi)d\xi.$$

Нетрудно показать, что если

$$a^*(x) \leq 0, \quad a^{*''}(x) - b^{*'}(x) + 2c^*(x) \geq 0, \quad (4.46)$$

то задача (4.44), (4.43) имеет только тривиальное решение.

Из альтернативы Фредгольма [20] следует, что если 1 не является характеристическим числом непрерывного ядра $K(x, \xi)$, то уравнение (4.45) имеет единственное решение.

Определив $T(x)$ из (4.40), найдем $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$. Тогда решение задачи 4.6 в области D_2 определяется по формуле (4.19), а в области D_1 - как решение следующей вспомогательной задачи.

З а д а ч а 4.7. *Найти в области D_1 решение уравнения (4.35), удовлетворяющее краевым условиям (4.36) и $u(x, 0) = \tau_1(x)$.*

Введем обозначение $u_{xx}(x, y) = w(x, y)$. Пусть

$$w(0, y) = \mu_2(y), \quad w(\ell, y) = \omega(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4.47)$$

где $\mu_2(y)$, $\omega(y)$ - пока неизвестные функции. Тогда из уравнения (4.35) получаем уравнение

$$w_{xx} - w_y = -aw - bu_x - cu.$$

Теперь выпишем решение первой краевой задачи для этого уравнения с условия (4.47) и $w(x, 0) = \tau_1''(x)$:

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) \mu_2(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x, y; \ell, \eta) \omega(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^\ell G(x, y; \xi, 0) \tau_1''(\xi) d\xi - \int_0^\ell d\xi \int_0^y G(x, y; \xi, \eta) \times \\ & \times [a(\xi, \eta) w(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) u_\xi(\xi, \eta) + c(\xi, \eta) u] d\eta, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi-2n\ell)^2}{4(y-\eta)}} - e^{-\frac{(x+\xi-2n\ell)^2}{4(y-\eta)}} \right] - \text{функция}$$

Грина.

Интегрируя уравнение (4.48) получим

$$\begin{aligned} u_x(x, y) = & v_2(y) + \int_0^y \left[\int_0^x G_\xi(s, y; 0, \eta) ds \right] \mu_2(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^y \left[\int_0^x G_\xi(s, y; \ell, \eta) ds \right] \omega(\eta) d\eta + \int_0^\ell \left[\int_0^x G(s, y; \xi, 0) ds \right] \tau_1''(\xi) d\xi - \\ & - \int_0^\ell d\xi \int_0^y \left[\int_0^x G(s, y; \xi, \eta) ds \right] [a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_\xi + c(\xi, \eta) u] d\eta, \\ u(x, y) = & \tau_2(y) + x v_2(y) + \int_0^y \left[\int_0^x (x-s) G_\xi(s, y; 0, \eta) ds \right] \mu_2(\eta) d\eta - \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^y \left[\int_0^x (x-s) G_\xi(s, y; \ell, \eta) ds \right] \omega(\eta) d\eta + \int_0^\ell \left[\int_0^x (x-s) G_\xi(s, y; \xi, \theta) ds \right] \tau_I''(\xi) d\xi - \\
 & - \int_0^\ell d\xi \int_0^y \left[\int_0^x (x-s) G_\xi(s, y; \xi, \eta) ds \right] [a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_\xi + c(\xi, \eta) u] d\eta. \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

Используя условий $u_x(\ell, y) = \varphi_2(y)$, $u(\ell, y) = \varphi_I(y)$ из (4.49) и (4.50) имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_0^y \left[\int_0^\ell G_\xi(s, y; \theta, \eta) ds \right] \mu_2(\eta) d\eta - \int_0^y \left[\int_0^\ell G_\xi(s, y; \ell, \eta) ds \right] \omega(\eta) d\eta - \\
 & - \int_0^\ell d\xi \int_0^y \left[\int_0^\ell G(s, y; \xi, \eta) ds \right] [a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_\xi + c(\xi, \eta) u] d\eta = \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

$$= \varphi_2(y) - \nu_2(y) - \int_0^\ell \left[\int_0^\ell G(s, y; \xi, \theta) ds \right] \tau_I''(\xi) d\xi,$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^y \left[\int_0^\ell (\ell-s) G_\xi(s, y; \theta, \eta) ds \right] \mu_2(\eta) d\eta - \int_0^y \left[\int_0^\ell (\ell-s) G_\xi(s, y; \ell, \eta) ds \right] \omega(\eta) d\eta - \\
 & - \int_0^\ell d\xi \int_0^y \left[\int_0^\ell (\ell-s) G(s, y; \xi, \eta) ds \right] [a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_\xi + c(\xi, \eta) u] d\eta = \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

$$= \varphi_I(y) - \tau_2(y) - \ell \nu_2(y) - \int_0^\ell \left[\int_0^\ell (\ell-s) G(s, y; \xi, \theta) ds \right] \tau_I''(\xi) d\xi.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 G_\xi(x, y; \theta, \eta) &= \frac{x}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(y-\eta)}\right] + g_1(x, y, \eta), \\
 G_\xi(x, y; \ell, \eta) &= \frac{x-\ell}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] + g_2(x, y, \eta),
 \end{aligned}$$

где

$$g_1(x, y, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} (x-2n\ell) \exp\left[-\frac{(x-2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right],$$

$$g_2(x, y, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} [x - (2n+1)\ell] \exp\left\{-\frac{[x - (2n+1)\ell]^2}{4(y-\eta)}\right\}$$

Тогда из (4.51) и (4.52) соответственно имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\mu_2(\eta) + \omega(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = M_1(y), \quad (4.53)$$

$$\frac{\ell}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\mu_2(\eta) d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = M_2(y), \quad (4.54)$$

где

$$\begin{aligned} M_1(y) = & \varphi_2(y) - \nu_2(y) - \int_0^\ell \left[\int_0^\ell G(s, y; \xi, \theta) ds \right] \tau_1''(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^\ell d\xi \int_0^y \left[\int_0^\ell G(s, y; \xi, \eta) ds \right] [a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_\xi + c(\xi, \eta) u] d\eta + \\ & + \int_0^y g_1^*(y, \eta) \mu_2(\eta) d\eta + \int_0^y g_2^*(y, \eta) \omega(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

$$g_1^*(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{y-\eta}} \exp\left[-\frac{\ell^2}{4(y-\eta)}\right] - \int_0^\ell g_1(s, y, \eta) ds,$$

$$g_2^*(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{y-\eta}} \exp\left[-\frac{\ell^2}{4(y-\eta)}\right] + \int_0^\ell g_2(s, y, \eta) ds,$$

$$\begin{aligned} M_2(y) = & \varphi_1(y) - \tau_2(y) - \ell \nu_2(y) - \int_0^\ell \left[\int_0^\ell (\ell-s) G(s, y; \xi, \theta) ds \right] \tau_1''(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^y \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\ell \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{y-\eta}} dt - \int_0^\ell (\ell-s) g_1(s, y, \eta) ds \right] \mu_2(\eta) d\eta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^y \left[\frac{\ell}{\sqrt{\pi}(y-\eta)} e^{-\frac{\ell^2}{4(y-\eta)}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\ell}{\sqrt{\pi}(y-\eta)}} e^{-t^2} dt + \int_0^{\ell} (\ell-s) g_2(s, y, \eta) ds \right] \times \\
 & \times \omega(\eta) d\eta + \int_0^{\ell} d\xi \int_0^y \left[\int_0^{\ell} (\ell-s) G(s, y, \xi, \eta) ds \right] \left[a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_{\xi} + c(\xi, \eta) u \right] d\eta.
 \end{aligned}$$

Обращения интегральных уравнений (4.54) и (4.53) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \mu_2(y) = & \int_0^y H_{11}(y, \eta) \mu_2(\eta) d\eta + \int_0^y H_{12}(y, \eta) \omega(\eta) d\eta + \\
 & + \int_0^{\ell} d\xi \int_0^y H_{13}(\xi, y, \eta) \left[a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_{\xi} + c(\xi, \eta) u \right] d\eta + \Phi_1(y),
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_2(y) + \omega(y) = & \int_0^y H_{21}^*(y, \eta) \mu_2(\eta) d\eta + \int_0^y H_{22}^*(y, \eta) \omega(\eta) d\eta + \\
 & + \int_0^{\ell} d\xi \int_0^y H_{23}^*(\xi, y, \eta) \left[a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_{\xi} + c(\xi, \eta) u \right] d\eta + \Phi_2^*(y),
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

где

$$\begin{aligned}
 H_{11}(y, \eta) = & \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}\sqrt{y-\eta}} - \int_{\eta}^y \left[\frac{1}{2\pi\ell(y-\eta_1)(\eta_1-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\ell^2}{4\sqrt{\eta_1-\eta}}\right] + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\ell} \frac{(\ell-s) g_{1\eta_1}(s, \eta_1, \eta)}{\sqrt{\pi\ell}\sqrt{y-\eta_1}} ds \right] d\eta_1, \\
 H_{12}(y, \eta) = & -\frac{1}{\sqrt{\pi\ell}\sqrt{y-\eta}} + \int_{\eta}^y \left[\frac{\ell^2}{4\pi(\eta_1-\eta)^{5/2}} \exp\left[-\frac{\ell^2}{4(\eta_1-\eta)}\right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\pi(y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\ell^2}{4(y-\eta)}\right] + \int_0^{\ell} \frac{\ell-s}{\sqrt{\pi\ell}} g_{2\eta_1}(s, \eta_1, \eta) ds \right] \frac{d\eta_1}{\sqrt{y-\eta_1}}, \\
 H_{13}(y, \xi, \eta) = & \int_{\eta}^y \frac{\ell-\xi + \ell G_x(0, \eta_1; \xi, \eta)}{\sqrt{\eta\ell}\sqrt{y-\eta_1}} d\eta_1 + \frac{\ell-\xi}{\sqrt{\pi\ell}\sqrt{y-\eta}},
 \end{aligned}$$

$$\Phi_1(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \int_0^y [\varphi'_1(\eta) - \tau'_2(\eta) - \ell \nu'_2(\eta) - \ell \int_0^\ell G_x(\theta, \eta; \xi, \theta) \tau''_1(\xi) d\xi] \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}},$$

$$H_{21}^*(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^y \frac{g_{1\eta_1}^*(\eta_1, \eta)}{\sqrt{y-\eta_1}} d\eta_1,$$

$$H_{22}^*(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^y \frac{g_{2\eta_1}^*(\eta_1, \eta)}{\sqrt{y-\eta_1}} d\eta_1,$$

$$H_{23}^*(y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{y-\eta}} + \int_\eta^y [\lambda(\eta_1, \xi, \eta) - \frac{\xi^2}{4(\eta_1-\eta)} + (\ell - \xi) e^{-\frac{(\xi-\ell)^2}{4(\eta_1-\eta)}}] \frac{d\eta_1}{\sqrt{\pi}\sqrt{y-\eta_1}},$$

$$\Phi_2^*(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \{ \varphi'_2(\eta) - \nu'_2(\eta) - \int_0^\ell G_x(\ell, \eta; \xi, \theta) - G_x(\theta, \eta, \xi, \theta) / \tau''_1(\xi) d\xi \} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}.$$

Вычитая из (4.56) равенство (4.55), имеем

$$\begin{aligned} \omega(y) = & \int_0^y H_{21}(y, \eta) \mu_2(\eta) d\eta + \int_0^y H_{22}(y, \eta) \omega(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^\ell d\xi \int_0^y H_{23}(y, \xi, \eta) [a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_\xi + c(\xi, \eta) u] d\eta + \Phi_2(y), \end{aligned} \quad (4.57)$$

где

$$H_{21}(y, \eta) = H_{21}^*(y, \eta) - H_{11}(y, \eta), \quad H_{22}(y, \eta) = H_{22}^*(y, \eta) - H_{12}(y, \eta),$$

$$H_{23}(y, \xi, \eta) = H_{23}^*(y, \xi, \eta) - H_{13}(y, \xi, \eta), \quad \Phi_2(y) = \Phi_2^*(y) - \Phi_1(y).$$

Обращая (4.57) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\omega(y)$, получим

$$\begin{aligned} \omega(y) = & \tilde{\Phi}_2(y) + \int_0^y \tilde{H}_{21}(y, \eta) \mu_2(\eta) d\eta + \int_0^\ell d\xi \int_0^y \tilde{H}_{23}(y, \xi, \eta) \times \\ & \times [a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_\xi + c(\xi, \eta) u] d\eta, \end{aligned} \quad (4.58)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(y) = & \Phi_2(y) + \int_0^y R_{22}(y, \eta) \Phi_2(\eta) d\eta, \\ \tilde{H}_{21}(y, \eta) = & H_{21}(y, \eta) + \int_\eta^y R_{22}(y, \eta_1) H_{21}(\eta_1, \eta) d\eta_1, \\ \tilde{H}_{23}(y, \xi, \eta) = & H_{23}(y, \xi, \eta) + \int_\eta^y R_{22}(y, \eta_1) H_{23}(\eta_1, \xi, \eta) d\eta_1, \end{aligned}$$

$R_{22}(y, \eta)$ - резольвента ядра $H_{22}(y, \eta)$.

Тогда из (4.55) имеем

$$\begin{aligned} \mu_2(y) = & \tilde{\Phi}_1(y) + \int_0^y \tilde{H}_{11}(y, \eta) \mu_2(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^\ell d\xi \int_0^y \tilde{H}_{13}(y, \xi, \eta) [a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + b(\xi, \eta) u_\xi + c(\xi, \eta) u] d\eta, \end{aligned} \quad (4.59)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(y) = & \Phi_1(y) + \int_0^y H_{12}(y, \eta) \tilde{\Phi}_2(\eta) d\eta, \\ \tilde{H}_{11}(y, \eta) = & H_{11}(y, \eta) + \int_\eta^y H_{12}(y, \eta_1) \tilde{H}_{21}(\eta_1, \eta) d\eta_1, \\ \tilde{H}_{13}(y, \xi, \eta) = & H_{13}(y, \xi, \eta) + \int_\eta^y H_{12}(y, \eta_1) \tilde{H}_{23}(\eta_1, \xi, \eta) d\eta_1. \end{aligned}$$

Обращая (4.59) относительно $\mu_2(y)$, получим

$$\begin{aligned} \mu_2(y) = & \hat{\Phi}_1(y) + \int_0^\ell d\xi \int_0^y \hat{H}_{13}(y, \xi, \eta) [a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + \\ & + b(\xi, \eta) u_\xi + c(\xi, \eta) u] d\eta, \end{aligned} \quad (4.60)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(y) = & \tilde{\Phi}_1(y) + \int_0^y R_{11}(y, \eta) \tilde{\Phi}_1(\eta) d\eta, \\ \hat{H}_{13}(y, \xi, \eta) = & \tilde{H}_{13}(y, \xi, \eta) + \int_\eta^y R_{11}(y, \eta_1) \tilde{H}_{13}(\eta_1, \xi, \eta) d\eta_1. \end{aligned}$$

Тогда (4.58) приводится к виду

$$\begin{aligned} \omega(y) = & \hat{\Phi}_2(y) + \int_0^\ell d\xi \int_0^y \hat{H}_{23}(y, \xi, \eta) [a(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + \\ & + b(\xi, \eta) u_\xi + c(\xi, \eta) u] d\eta, \end{aligned} \quad (4.61)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_2(y) = & \tilde{\Phi}_2(y) + \int_0^y \tilde{H}_{21}(y, \eta) \hat{\Phi}_1(\eta) d\eta, \\ \hat{H}_{23}(y, \xi, \eta) = & \tilde{H}_{23}(y, \xi, \eta) + \int_\eta^y \tilde{H}_{21}(y, \eta_1) \tilde{H}_{23}(\eta_1, \xi, \eta) d\eta_1. \end{aligned}$$

Подставляя $\mu_2(y)$ и $\omega(y)$ в равенства (4.50), (4.49), (4.48) и введя

обозначения

$$u_x(x, y) = \mathfrak{A}(x, y), \quad u_{xx}(x, y) = w(x, y),$$

убеждаемся в том, что решение задачи 4.7 сведена к решению системы трех интегральных уравнений относительно трех функций u , $\mathfrak{A}$ и w :

$$\begin{aligned} u(x, y) = & T_1(x, y) - \int_0^\ell d\xi \int_0^y H_1^*(x, y; \xi, \eta) [a(\xi, \eta) w + \\ & + b(\xi, \eta) \mathfrak{A} + c(\xi, \eta) u] d\eta, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y) = & T_2(x, y) - \int_0^\ell d\xi \int_0^y H_2^*(x, y; \xi, \eta) [a(\xi, \eta)w + \\ & + b(\xi, \eta)\mathcal{G} + c(\xi, \eta)u] d\eta, \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} w(x, y) = & T_3(x, y) - \int_0^\ell d\xi \int_0^y H_3^*(x, y; \xi, \eta) [a(\xi, \eta)w + \\ & + b(\xi, \eta)\mathcal{G} + c(\xi, \eta)u] d\eta, \end{aligned} \quad (4.64)$$

где

$$\begin{aligned} H_1^*(x, y; \xi, \eta) = & \int_0^x (x-s)G(s, y; \xi, \eta)ds - \int_0^x ds \int_0^y (x-s)G_\xi(s, y; \theta, \eta_1) \times \\ & \times \hat{H}_{13}(\eta_1; \xi, \eta) d\eta_1 + \int_0^x ds \int_\eta^y (x-s)G_\xi(s, y; \ell, \eta_1) \hat{H}_{23}(\eta_1; \xi, \eta) d\eta_1, \\ H_2^*(x, y; \xi, \eta) = & \int_0^x G(s, y; \xi, \eta)ds - \int_0^x ds \int_\eta^y G_\xi(s, y; \theta, \eta_1) \times \\ & \times \hat{H}_{13}(\eta_1; \xi, \eta) d\eta_1 - \int_0^x ds \int_\eta^y G_\xi(s, y; \ell, \eta_1) \hat{H}_{23}(\eta_1; \xi, \eta) d\eta_1, \\ H_3^*(x, y; \xi, \eta) = & G(x, y; \xi, \eta) - \int_\eta^y G_\xi(x, y; \theta, \eta_1) \times \\ & \times \hat{H}_{13}(\eta_1; \xi, \eta) d\eta_1 - \int_\eta^y G_\xi(x, y; \ell, \eta_1) \hat{H}_{23}(\eta_1; \xi, \eta) d\eta_1, \\ T_1(x, y) = & \tau_2(y) + xv_2(y) + \int_0^x ds \int_0^y (x-s)G_\xi(s, y; \theta, \eta) \hat{\Phi}_1(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^x ds \int_0^y (x-s)G_\xi(s, y; \ell, \eta) \hat{\Phi}_2(\eta) d\eta + \int_0^x ds \int_0^\ell (x-s)G(s, y; \xi, \theta) \tau_1''(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_2(x, y) &= \tau_2(y) + \int_0^x ds \int_0^y G_\xi(s, y; \theta, \eta) \hat{\Phi}_1(\eta) d\eta - \\
 &- \int_0^x ds \int_0^y G_\xi(s, y; \ell, \eta) \hat{\Phi}_2(\eta) d\eta + \int_0^x ds \int_0^\ell G(s, y; \xi, \theta) \tau_1''(\xi) d\xi, \\
 T_3(x, y) &= \tau_2(y) + \int_0^y G_\xi(s, y; \theta, \eta) \hat{\Phi}_1(\eta) d\eta - \\
 &- \int_0^y G_\xi(s, y; \ell, \eta) \hat{\Phi}_2(\eta) d\eta + \int_0^\ell G(s, y; \xi, \theta) \tau_1''(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Учитывая представление функции $G(x, y; \xi, \eta)$ нетрудно получить следующие оценки

$$\begin{aligned}
 |H_i^*(x, y; \xi, \eta)| &\leq \frac{N}{\sqrt{y - \eta}}, \quad |T_i(x, y)| \leq C, \quad i = \overline{1, 3}, \\
 |H_3^*(x, y; \xi, \eta)| &\leq \frac{N}{\sqrt{y - \eta} \xi^{2(1-\mu_1)} (\ell - \xi)^{2(1-\mu_2)}}, \quad \frac{1}{2} < \mu_i < 1, \quad i = 1, 2,
 \end{aligned}$$

где N и C - постоянные числа.

Кроме того непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$T_{1x} = T_2, T_{2x} = T_3, H_{1x}^* = H_2^*, H_{1x}^* = H_3^* \text{ или } T_{1xx} = T_3, H_{1xx}^* = H_3^*.$$

Тогда из (4.62)-(4.64) получаем $u_x(x, y) = \vartheta(x, y)$, $\vartheta_x(x, y) = w(x, y)$ или $u_{xx}(x, y) = w(x, y)$.

Теперь покажем, что если функции $u, \vartheta, w \in C(\overline{D}_1)$ удовлетворяют систему интегральных уравнений (4.62)-(4.64), то $u(x, y)$ является решением задачи 4.7.

Пусть функции $u, \vartheta, w \in C(\overline{D}_1)$ является решением системы уравнений (4.62)-(4.64). Так как $T_{3xx} - T_{3y} = 0$, $H_{3xx}^* - H_{3y}^* = 0$ при $(x, y) \in D_1$, то из (4.64) имеем $w_{xx} - w_y = -(aw + b\vartheta + cu)$.

Это означает, что

$$u_{xxxx} - u_{xxy} + au_{xx} + bu_x + cu = 0, \quad (x, y) \in D_1.$$

В силу того, что $T_1(0, y) = \tau_2(y)$, $H_1^*(0, y; \xi, \eta) = 0$,

$T_2(0, y) = v_2(y)$, $H_2^*(0, y; \xi, \eta) = 0$, из (4.62) и (4.63) непосредственно будем иметь

$$u(0, y) = \tau_2(y), \quad u_x(0, y) = \vartheta(0, y) = v_2(y).$$

Теперь остановимся на доказательство выполнения условия $u(\ell, y) = \varphi_1(y)$.

Оно следует из следующей цепочки равенств

$$\begin{aligned} u(\ell, y) &= T_1(\ell, y) - \int_0^\ell ds \int_0^y H_1^*(\ell, y; \xi, \eta) [a(\xi, \eta)w + b(\xi, \eta)\vartheta + c(\xi, \eta)u] d\eta = \\ &= \tau_2(y) + \ell v_2(y) + \int_0^\ell ds \int_0^y (\ell - s) G_\xi(s, y; 0, \eta) \hat{\Phi}_1(\eta) d\eta - \\ &- \int_0^\ell ds \int_0^y (\ell - s) G_\xi(s, y; \ell, \eta) \hat{\Phi}_2(\eta) d\eta + \int_0^\ell ds \int_0^\ell (\ell - s) G(s, y; \xi, 0) \tau_1''(\xi) d\xi - \\ &- \int_0^\ell ds \int_0^y \int_0^\ell (\ell - s) G(s, y; \xi, \eta) ds - \int_0^\ell ds \int_0^y (\ell - s) G_\xi(s, y; 0, \eta_1) \times \\ &\times \hat{H}_{13}(\eta_1; \xi, \eta) d\eta_1 + \int_0^\ell ds \int_0^y (\ell - s) G_\xi(s, y; \ell, \eta_1) \hat{H}_{23}(\eta_1; \xi, \eta) d\eta_1 \int_0^\ell \times \\ &\times [a(x, y)w + b(\xi, \eta)\vartheta + c(\xi, \eta)u] d\eta = \\ &= \tau_2(y) + \ell v_2(y) + \int_0^\ell ds \int_0^\ell (\ell - s) G(s, y; \xi, 0) \tau_1''(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^\ell ds \int_0^y (\ell - s) G_\xi(s, y; 0, \eta) \hat{\Phi}_1(\eta) d\eta + \int_0^\ell ds \int_0^y d\eta_1 \int_0^\ell ds \int_0^{\eta_1} (\ell - s) \times \\ &\times G_\xi(s, y; 0, \eta_1) \hat{H}_{13}(\eta_1; \xi, \eta) [a(\xi, \eta)w + b(\xi, \eta)\vartheta + c(\xi, \eta)u] d\eta - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\ell ds \int_0^y (\ell - s) G_\xi(s, y; \ell, \eta) \hat{\Phi}_2(\eta) d\eta - \\
& - \int_0^\ell ds \int_0^y d\eta_1 \int_0^\ell ds \int_0^{\eta_1} (\ell - s) G_\xi(s, y; \ell, \eta_1) \hat{H}_{23}(\eta_1; \xi, \eta) [a(\xi, \eta)w + \\
& + b(\xi, \eta)\vartheta + c(\xi, \eta)u] d\eta - \int_0^\ell ds \int_0^y \int_0^\ell (\ell - s) G(s, y; \xi, \eta) ds \int_0^\ell \\
& \times [a(\xi, \eta)w + b(\xi, \eta)\vartheta + c(\xi, \eta)u] d\eta = \\
& = \tau_2(y) + \ell v_2(y) + \int_0^\ell ds \int_0^\ell (\ell - s) G(s, y; \xi, 0) \tau_1''(\xi) d\xi + \\
& + \int_0^\ell ds \int_0^y (\ell - s) G_\xi(s, y; 0, \eta) \{ \hat{\Phi}_1(\eta) + \int_0^\ell ds \int_0^\eta \hat{H}_{13}(\eta; \xi, \eta_1) \times \\
& \times [a(\xi, \eta_1)w + b(\xi, \eta_1)\vartheta + c(\xi, \eta_1)u] d\eta_1 \} d\eta - \\
& - \int_0^\ell ds \int_0^y (\ell - s) G_\xi(s, y; \ell, \eta) \{ \hat{\Phi}_2(\eta) + \int_0^\ell ds \int_0^\eta \hat{H}_{23}(\eta; \xi, \eta_1) \times \\
& \times [a(\xi, \eta_1)w + b(\xi, \eta_1)\vartheta + c(\xi, \eta_1)u] d\eta_1 \} d\eta - \\
& - \int_0^\ell ds \int_0^y \int_0^\ell (\ell - s) G(s, y; \xi, \eta) ds [a(\xi, \eta)w + b(\xi, \eta)\vartheta + c(\xi, \eta)u] d\eta = \\
& = \tau_2(y) + \ell v_2(y) + \int_0^\ell ds \int_0^\ell (\ell - s) G(s, y; \xi, 0) \tau_1'(\xi) d\xi + \\
& + \int_0^\ell ds \int_0^y (\ell - s) G_\xi(s, y; 0, \eta) \mu_2(\eta) d\eta - \int_0^\ell ds \int_0^y (\ell - s) G_\xi(s, y; \ell, \eta) \omega(\eta) d\eta - \\
& - \int_0^\ell ds \int_0^y \int_0^\ell (\ell - s) G(s, y; \xi, \eta) ds [a(\xi, \eta)w + b(\xi, \eta)\vartheta + c(\xi, \eta)u] d\eta = \\
& = \tau_2(y) + \ell v_2(y) + \int_0^\ell ds \int_0^\ell (\ell - s) G(s, y; \xi, 0) \tau_1''(\xi) d\xi + \varphi_1(y) - \tau_2(y) - \\
& - \ell v_2(y) - \int_0^\ell ds \int_0^\ell (\ell - s) G(s, y; \xi, 0) \tau_1''(\xi) d\xi = \varphi_1(y).
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношения (4.60), (4.61) и (4.52).

Аналогично доказывается выполнение условия $u_x(\ell, y) = \varphi_2(y)$.

Таким образом, доказана следующая

Л е м м а 4.1. *Если функция $u, \vartheta, w \in C(\overline{D}_1)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (4.62)-(4.64), то $u(x, y)$ является решением задачи 4.7 и наоборот.*

Однозначную разрешимость системы (4.62)-(4.64) устанавливает

Л е м м а 4.2. *Система интегральных уравнений (4.62)-(4.64) имеет единственное в классе непрерывных функций решение $u(x, y), \vartheta(x, y), w(x, y)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для решения системы уравнений (4.62)-(4.64) применим метод последовательных приближений, положив

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y), \quad \vartheta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n(x, y), \quad w(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, y),$$

где

$$u_0(x, y) = T_1(x, y), \vartheta_0(x, y) = T_2(x, y), w_0(x, y) = T_3(x, y),$$

$$u_n(x, y) = - \int_0^{\ell} d\xi \int_0^y H_1^*(x, y; \xi, \eta) [a(\xi, \eta) w_{n-1} + b(\xi, \eta) \vartheta_{n-1} + c(\xi, \eta) u_{n-1}] d\eta,$$

$$\vartheta_n(x, y) = - \int_0^{\ell} d\xi \int_0^y H_2^*(x, y; \xi, \eta) [a(\xi, \eta) w_{n-1} + b(\xi, \eta) \vartheta_{n-1} + c(\xi, \eta) u_{n-1}] d\eta,$$

$$w_n(x, y) = - \int_0^{\ell} d\xi \int_0^y H_3^*(x, y; \xi, \eta) [a(\xi, \eta) w_{n-1} + b(\xi, \eta) \vartheta_{n-1} + c(\xi, \eta) u_{n-1}] d\eta,$$

Пусть $M = \max\{\max|u_0|, \max|\vartheta_0|, \max|w_0|, K = \max\{|a|, |b|, |c|\}\}$.

Учитывая указанные выше оценки функций $H_i^*(x, y; \xi, \eta)$ и

$T_i(x, y), \quad i = \overline{1, 3}$, по индукции имеем

$$|u_n|, |\mathcal{G}_n|, |w_n| \leq \frac{M}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \left[\sqrt{\pi} KNL \sqrt{y} \right]^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$L = \max \left\{ \ell, B(2\mu_1 - 1, 2\mu_2 - 1) \ell^{2(\mu_1 + \mu_2) - 3} \right\}.$$

Из этих оценок следует равномерная сходимость рядов

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad \mathcal{G} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n, \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n,$$

которые мажорируются сходящимся рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \left[\sqrt{\pi h} KNL \right]^n.$$

Используя асимптотическую формулу

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right] \quad (z \rightarrow \infty, |\arg z| < \pi)$$

и с помощью признака Даламбера легко можно установить сходимость последнего ряда.

Следовательно, построенные функции u , $\mathcal{G}$, w непрерывны в $\overline{D}_1$.

Докажем, что они удовлетворяют систему (4.62)-(4.64). Установим это, например, для уравнения (4.62). Суммируя рекуррентные соотношения для $u_n(x, y)$ по n от 0 до N , получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N u_n(x, y) &= T_I(x, y) - \int_0^\ell d\xi \int_0^y H_I^*(x, y; \xi, \eta) [a(\xi, \eta) \sum_{n=1}^N w_{n-1}(\xi, \eta) + \\ &+ b(\xi, \eta) \sum_{n=1}^N \mathcal{G}_{n-1}(\xi, \eta) + c(\xi, \eta) \sum_{n=1}^N u_{n-1}(\xi, \eta)] d\eta. \end{aligned}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $N \rightarrow \infty$ и пользуясь равномерной сходимостью рядов, получим

$$u(x, y) = T_I(x, y) - \int_0^\ell d\xi \int_0^y H_I^*(x, y; \xi, \eta) [\alpha(\xi, \eta) w + b(\xi, \eta) \mathcal{G} + c(\xi, \eta) u] d\eta.$$

Докажем единственность решения системы уравнений (4.62)-(4.64) в классе $C(\overline{D}_I)$. Для этого достаточно доказать, что соответствующая однородная система (4.62)-(4.64) имеет только нулевое решение. Пусть u^* , ϑ^* , w^* - решение однородной системы (4.62)-(4.64), удовлетворяющее условиям

$$|u^*| \leq M, \quad |\vartheta^*| \leq M, \quad |w^*| \leq M.$$

Так как для функций u^* , ϑ^* , w^* справедливы оценки

$$|u^*(x, y)| \leq \frac{M}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} [\sqrt{\pi} KNL \sqrt{y}]^n, \quad |\vartheta^*(x, y)| \leq \frac{M}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} [\sqrt{\pi} KNL \sqrt{y}]^n,$$

$$|w^*(x, y)| \leq \frac{M}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} [\sqrt{\pi} KNL \sqrt{y}]^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ получаем $u^* = \vartheta^* = w^* = 0$.

Здесь мы учитывали следующее предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{\sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{(n+1)/2} e^{-(n+2)/2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2\pi} \sqrt[4]{a}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(n+2) (2e\sqrt{a})^{(n+1)/2}} = 0,$$

где $a = \sqrt{\pi} h KNL$.

Итак, лемма 4.2 доказана.

Таким образом, имеют место следующие теоремы.

Т е о р е м а 4.4. Если $\tau_2, \nu_2, \varphi_1, \varphi_2 \in C^1[0, h]$,

$$\tau_1 \in C^2[0, \ell] \cap C^4(\theta, \ell), \quad a, b, c \in C(D), \quad \tau_1(\theta) = \tau_2(\theta), \nu_2(\theta) = \tau'_1(\theta),$$

$\tau_2(\ell) = \varphi_1(\theta), \tau'_1(\ell) = \varphi_2(\theta)$, то задача 4.7 имеет единственное решение.

Т е о р е м а 4.5. *Если выполняются условия (4.46),*

$$\tau_2, \nu_2, \varphi_1, \varphi_2 \in C^1[0, h], \quad \chi_i \in C^1[-h_1, 0] \quad (i = \overline{1, 3}),$$

$$\tau_2(0) = \chi_1(0), \quad \tau'_2(0) = \chi'_2(0), \quad \nu_2(0) = \chi_2(0)$$

и число 1 не является характеристическим числом ядра $K(x, \xi)$, то задача 4.6 имеет единственное решение.

§ 4.4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Пусть D - конечная область, ограниченная отрезками BB_0 , B_0A_0 , прямых $x = \ell$, $y = h$ и отрезками характеристик $A_0C_0: x - y = -h$,

$C_0C: x + y = 0$, $CB: x - y = \ell$ уравнения

$$\theta = \begin{cases} u_{xxxx} - u_{xxy}, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xxxx} - 2u_{xxyy} + u_{yyyy}, & (x, y) \in D_2 \cup D_3, \end{cases} \quad (4.65)$$

где $D_2 = D \cap (y < 0)$, $D_3 = D \cap (x < 0)$, $D_1 = D \setminus (D_2 \cup D_3)$, $\ell > 0$, $h > 0$.

В этом параграфе исследуются краевые задачи для смешанного парабола-гиперболического уравнения (4.65). На важность подобных исследований в теории уравнений смешанного типа указывал А.В. Бицадзе [14]. Краевые задачи для уравнения вида (4.65), когда в области D_1 берется бигармоническое уравнение, рассмотрены в работах М.М. Смирнова [98], М.М. Мередова [72-74], В.И. Жегалова [53].

Задача 4.8. Найти решение уравнения (4.65) в области D при $x \neq 0$, непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$, удовлетворяющее условиям

$$u \Big|_{AC} = \psi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AC} = \psi_2(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{BC} = \varphi_3(x), \quad (4.66)$$

$$u \Big|_{AC_0} = \psi_4(y), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AC_0} = \psi_5(y), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{B_0C_0} = \varphi_6(y), \quad (4.67)$$

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(\ell, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4.68)$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} u_y(x, +0) &= u_y(x, -0), & u_x(-0, y) &= u_x(+0, y), \\ u_{xx}(-0, y) &= u_{xx}(+0, y), & u_{xxx}(-0, y) &= u_{xxx}(+0, y), \end{aligned}$$

где n - внутренняя нормаль.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tau_I(x), & u_y(x, 0) &= v_I(x), & 0 \leq x \leq \ell \\ u_{yy}(x, 0) &= \mu_I(x), & u_{yyy}(x, 0) &= \chi_I(x), & 0 \leq x \leq \ell. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Тогда в области D_2 решение уравнения (4.65) с начальными условиями (4.69) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2} [\tau_I(x+y) + \tau_I(x-y)] - \frac{1}{4} y [\tau'_I(x+y) - \tau'_I(x-y)] - \\ &- \frac{1}{4} y [v_I(x+y) + v_I(x-y)] + \frac{3}{4} \int_{x-y}^{x+y} v_I(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{4} y \int_{x-y}^{x+y} \mu_I(\xi) d\xi - \frac{1}{8} \int_{x-y}^{x+y} [(x-\xi)^2 - y^2] \chi_I(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Удовлетворяя (4.70) условиям (4.66), будем иметь

$$\begin{aligned} \tau''_I(x) - 2v'_I(x) + \mu_I(x) - \frac{x}{2} [\tau'''_I(x) - v''_I(x) - \mu'_I(x) + \chi_I(x)] &= \psi''_I\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq \ell \\ \tau'''_I(x) - v''_I(x) - \mu'_I(x) + \chi_I(x) &= \sqrt{2}\psi''_2\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ \tau'''_I(x) + v''_I(x) - \mu'_I(x) - \chi_I(x) &= \sqrt{2}\psi''_3\left(\frac{x+\ell}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq \ell, \end{aligned} \quad (4.71)$$

Устремляя в уравнении (4.65) y к нулю, имеем

$$\tau^{(4)}(x) - v''_I(x) = 0. \quad (4.72)$$

Исключая $\tau_2(x)$, $\mu_I(x)$ и $\chi_I(x)$ из (4.71), (4.72), приходим к задаче

$$\tau^{(4)}_I(x) - \tau'''_I(x) = -g(x),$$

$$\tau_I(0) = \psi_I(0), \quad \tau_I(\ell) = \psi_I(0),$$

$$\tau'_I(0) = \frac{1}{2}\psi'_I(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0), \quad \tau'_I(\ell) = \psi_2(0),$$

которая имеет единственное решение. Определив отсюда $\tau_I(x)$, будем знать $v_I(x)$, $\mu_I(x)$, $\chi_I(x)$.

Теперь выпишем решение задачи Коши для уравнения (4.65) в области D_3 с условиями

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \tau_2(y), \quad u_x(0, y) = v_2(y), \\ u_{xx}(0, y) &= \mu_2(y), \quad u_{xxx}(0, y) = \chi_2(y): \\ u(x, y) &= \frac{1}{2}[\tau_2(y+x) + \tau_2(y-x)] - \frac{1}{4}x[\tau_2'(y+x) - \tau_2'(y-x)] - \\ &- \frac{1}{4}x[v_2(y+x) + v_2(y-x)] + \frac{3}{4} \int_{y-x}^{y+x} v_2(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{4}x \int_{y-x}^{y+x} \mu_2(\xi) d\xi - \frac{1}{8} \int_{y-x}^{y+x} [(y-\xi)^2 - x^2] \chi_2(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Как и выше, удовлетворяя (4.73) краевым условиям (4.67), будем иметь

$$\begin{aligned} \tau_2''(y) - 2v_2'(y) + \mu_2(y) - \\ - \frac{y}{2}[\tau_2'''(y) - v_2''(y) - \mu_2'(y) + \chi_2(y)] &= \psi_4''\left(\frac{y}{2}\right), \quad 0 \leq y \leq h, \\ \tau_2'''(y) - v_2''(y) - \mu_2'(y) + \chi_2(y) &= \sqrt{2}\psi_5''\left(\frac{y}{2}\right), \quad 0 \leq y \leq h, \\ \tau_2'''(y) + v_2''(y) - \mu_2'(y) - \chi_2(y) &= -\sqrt{2}\psi_6''\left(\frac{y+\ell}{2}\right), \quad 0 \leq y \leq h. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \tau_2''(y) - 2v_2'(y) + \mu_2(y) &= \psi_4''\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}y\psi_5''\left(\frac{y}{2}\right), \quad 0 \leq y \leq h, \\ \tau_2'''(y) - \mu_2'(y) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\psi_5''\left(\frac{y}{2}\right) - \psi_6''\left(\frac{y+h}{2}\right) \right], \quad 0 \leq y \leq h. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Теперь, введя обозначение $u_{xx}(x, y) = w(x, y)$, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} w_{xx} - w_y &= 0, \quad (x, y) \in D_I, \\ w(0, y) &= \mu_2(y), \quad w(\ell, y) = f(y), \quad w(x, 0) = \tau_I''(x), \end{aligned}$$

где $\mu_2(y)$, $f(y)$ - пока неизвестные функции, решение которой представимо в виде

$$w(x, y) = u_{xx}(x, y) = \int_0^y G_\xi(x, y; \theta, \eta) \mu_2(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x, y; \ell, \eta) f(\eta) d\eta + \int_0^\ell G(x, y; \xi, \theta) \tau_1''(\xi) d\xi, \quad (4.75)$$

здесь $G(x, y; \xi, \eta)$ - функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Реализуя условия (4.68) в (4.75) и после некоторого преобразования, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} & \tau_2(y) + \ell v_2(y) + \int_0^y T_1(y, \eta) \mu_2(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^y T_2(y, \eta) f(\eta) d\eta + \frac{\ell}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\mu_2(\eta)}{\sqrt{y - \eta}} d\eta = \Phi_1(y), \\ & \mu_2(y) + f(y) - \int_0^y T_3(y, \eta) \mu_2(\eta) d\eta - \int_0^y T_4(y, \eta) f(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{v_2(\eta)}{\sqrt{y - \eta}} d\eta = \Phi_2(y), \end{aligned} \quad (4.76)$$

где $T_i (i = 1, 4)$, $\Phi_i (i = 1, 2)$ - известные функции.

Обращая второе уравнение системы (4.76) относительно $f(y)$ и исключая $\tau_2(y), v_2(y)$ с учетом соотношений (4.74), для $\mu_2(y)$ получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\mu_2(y) + \int_0^y K(y, \eta) \mu_2(\eta) d\eta = \Phi(y),$$

допускающее единственное решение в классе $C^3(\theta, h)$.

Найдя отсюда $\mu_2(y)$, последовательно определим $\tau_2(y), v_2(y)$ и $\chi_2(y)$, и тем самым функцию $u(x, y)$ в области D_3 . Таким образом решение задачи 4.8 в области D_3 определим по формуле (4.73), а в D_1 - по формуле

$$u(x, y) = \tau_2(y) + x\nu_2(y) + \int_0^x (x-s) \left[\int_0^y G_\xi(s, y; \theta, \eta) \mu_2(\eta) d\eta - \right. \\ \left. - \int_0^y G_\xi(s, y; \ell, \eta) f(\eta) d\eta + \int_0^\ell G(s, y; \xi, \theta) \tau_1''(\xi) d\xi \right] ds.$$

Следовательно, имеет место

Т е о р е м а 4.6. *Если выполняются условия*

$$\varphi_1(y) \in C^2[0, h] \cap C^5(0, h), \quad \varphi_2(y) \in C^2[0, h] \cap C^4(0, h),$$

$$\psi_1(y), \psi_2(x) \in C^2[0, \frac{\ell}{2}] \cap C^5\left(0, \frac{\ell}{2}\right), \quad \psi_3(x) \in C^2[\frac{\ell}{2}, \ell] \cap C^4\left(\frac{\ell}{2}, \ell\right),$$

$$\psi_4(y), \psi_5(y) \in C^2[0, \frac{h}{2}] \cap C^5\left(0, \frac{h}{2}\right), \quad \psi_6(y) \in C^2[\frac{h}{2}, h] \cap C^4\left(\frac{h}{2}, h\right),$$

$$\psi_1(0) = \psi_4(0), \quad \psi_1'(0) = \psi_4'(0), \quad \varphi_1'(0) - \varphi_2(0) = \sqrt{2}\psi_3(0),$$

то задача 4.8 имеет единственное решение.

Аналогично исследуется

З а д а ч а 4.9. *Найти $u(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи 4.8, если вместо условий (4.68) берутся условия*

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y), \quad u_{xx}(\ell, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдиназаров С. Краевые задачи для уравнений с кратными характеристиками: Автореф. дис. ... докт. физ. - мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 1992. – 27 с.
2. Абдрахманов М.А. Об одной задаче сопряжения различных типов // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ. - мат. - 1971. - № 5. - С. 1-7.
3. Акилов Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. - Ташкент: Фан, 1982. - 104 с.
4. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа: Дис. ... докт. физ. - мат. наук: 01.01.02. - Алма-Ата, 1989. - 188 с.
5. Апаков Ю.П. Краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа в трехмерных областях: Дис. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 1989. – 115 с.
6. Артиков М. Некоторые краевые задачи для уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками: Дис. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 1998. – 14 с.
7. Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа: Дис. ... докт. физ. - мат. наук: 01.01.02. - М.: 1951. - 195 с.
8. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. - М.: Наука, 1964. - 368 с.
9. Баренблатт Г.И., Жеглов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиновых породах // Прикл. матем. и мех. - 1960. - Т. 25. - Вып. 5. - С. 852-864.
10. Бердышев А.С. Краевые задачи для парабола-гиперболических уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 1983. - 120 с.
11. Бердышев А.С. О существовании собственных значений одной краевой задачи для парабола-гиперболического уравнения третьего порядка. // Узбекский математический журнал. - 1998. - № 2. - С. 19-25.
12. Берс Л. Математические вопросы до звуковой и около звуковой газовой динамики. - М.: ИЛ., 1961. - 208 с.
13. Бжихатов Х.Г., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Доклады АН СССР. - 1968. - Т. 183. - № 2. - С. 261-264.
14. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. - М.: Изд-во АН СССР, 1959. - 164 с.
15. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сибирский матем. журнал. - 1962. - Т. 111. - № 5. - С. 642-644.
16. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981. - 448 с.
17. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа // Сибирский матем. журнал. - 1961. - Т. 2. - № 1. - С. 7-49.
18. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. - 1969. - Т. 185. - № 4. - С. 739-740.
19. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. - М.: Наука, 1990. - 432 с.
20. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1988. - 512 с.
21. Водахова В.А. Краевые задачи для уравнения третьего порядка смешанного псевдо парабола-гиперболического типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Нальчик, 1983. - 97 с.

22. Волкодав В.Ф. Принцип локального экстремума и его применение к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Казань, 1969. - 10 с.

23. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. - Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983. - 84 с.

24. Габов С.А., Оразов Б.Б. Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u_{xx} - u] + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задачах // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 1986. - Т. 26. - №1. - С. 92-102.

25. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. - М.: Наука, 1986. - 288 с.

26. Габов С.А., Свешников А.Г. Математические задачи динамики стратифицированной жидкости // Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. - М.: Наука, 1986. - С.107-141.

27. Гвазава Д.К. О некоторых классах квазилинейных уравнений смешанного типа // Труды Тбилисского матем. ин-та АН Груз. ССР. - 1981. - Т. 67. - 94 с.

28. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. - 1959. - Т. 14. - Вып.3 (87). - С.3-19.

29. Джураев А. Системы уравнений составного типа. - М.: Наука, 1972. - 228 с.

30. Джураев Т.Д. Об уравнениях смешанно-составного типа // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. - 1961. № 6. - С. 7-12.

31. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешано-составного типов. - Ташкент: Фан, 1979. - 240 с.

32. Джураев Т.Д., Мамажанов М.О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка смешанно-составного типа, содержащих парабола-гиперболический оператор с младшими членами // Известия АН. УзССР. Серия физ.-мат. наук. - 1982. №5. - С. 12-15.

33. Джураев Т.Д., Попёлок Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. - 1991. - Т. 27. - № 10. - С. 1734-1745.

34. Джураев Т.Д., Рахмонов У. О корректных краевых задачах для уравнений смешанно-составного типа // Дифференц. уравнения. - 1973. - Т.9. - № 1. - С.32-40.

35. Джураев Т.Д., Сопуев А. О краевых задачах для уравнений третьего порядка парабола-гиперболического типа // Краевые задачи механики сплошных сред. - Ташкент: Фан, 1982. - С. 72-86.

36. Джураев Т.Д., Сопуев А. Об одной пространственной задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. - 1981. - Т.22. - № 1. - С.50-57.

37. Джураев Т.Д., Сопуев А. О краевых задачах для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. - 1981. - № 4. - С. 22-26.

38. Джураев Т.Д., Сопуев А. Об одной задаче для уравнений третьего порядка парабола-гиперболического типа // Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения. - Ташкент: Фан, 1984. - С. 38-45.

39. Джураев Т.Д., Сопуев А. Об разрешимости задачи Коши для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Дифференциальные уравнения и их приложения к механике. - Ташкент: Фан, 1985. - С. 14-25.

40. Джураев Т.Д., Сопуев А. О краевых задачах для смешанного парабола-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Краевые

- задачи для неклассических уравнений математической физики. - Ташкент: Фан, 1986. - С. 77-89.
41. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. - 220 с.
42. Джураев Т.Д., Сопуев А. О краевых задачах для смешанного парабола-гиперболического уравнения с не характеристической линией изменения типа // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Ташкент.Фан, 1986. - С. 77-89.
43. Джураев Т.Д., Сопуев А., Апаков Ю.П. Краевые задачи для парабола-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа // Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. - Ташкент: Фан, 1987. - С.56-65.
44. Джураев Т.Д., Сопуев А. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т. математики. - Новосибирск, 1990. - С. 82-94.
45. Джураев Т.Д., Сопуев А. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными четвертого порядка // Узбекский математический журнал. - 1994. - № 3. - С. 7-21.
46. Джураев Т.Д., Сопуев А. О краевых задачах для смешанного парабола-гиперболического уравнения четвертого порядка. // Доклады АН РУз. Серия математика, технические науки, естествознание. - 1996. - № 11. - С. 6-9.
47. Джураев Т.Д., Сопуев А., Асылбеков Т.Д. Свойства функции Римана для гиперболического уравнения четвертого порядка // Науч. тр. ОшГУ. Физ.-мат. науки. - Ош: ОшГУ, 1999. - Вып. 2. - С. 89-98.
48. Джураев Т.Д., Сопуев А., Осмоналиев А.Б. Задача Дирихле для гиперболического уравнения четвертого порядка // Науч. тр. ОшГУ. Физ.-мат.науки. - Ош: ОшГУ, 1999. - Вып. 2. - С. 99-106.
49. Джураев Т.Д., Шарифбаев Я.С. О некоторых краевых задачах для уравнений с частными производными третьего порядка // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. - Ташкент: Фан, 1972. - С. 80-96.
50. Джураев Т.Д., Эгамбердиев У. О некоторых краевых задачах для смешанного гипербола-параболического уравнения // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат.наук. - 1984. - № 2. - С. 15-20.
51. Ержанов Ж.С., Искакбаев А.И. О неустойчивости вязкоупругого слоя в вязкой среде // Известия АН Каз.ССР. Серия. физ.-мат. - 1988. - № 3. С. 74-79.
52. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. - Минск: Наука и Техника, 1970. - 572 с.
53. Жегалов В.И. Исследование краевых задач со смещениями для уравнений смешанного типа: Дис. ... докт. физ-мат. наук: 01.01.02. - Казань, 1987. - 297 с.
54. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа // Журнал вычисл. матем. и матем.физики. - 1966. - Т. 6. - С. 991-1001.
55. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Успехи матем.наук. - 1962. - Т. 17. - Вып. 3. - С.3-141.
56. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Докл. АН СССР. - 1992. - Т. 323, № 3. - С. 410-414.
57. Исломов Б. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями и плоскостями вырождения: Автореферат дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 2000. - 28 с.

58. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов: Автореф. дис. ...докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - М., 1982. - 27 с.
59. Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. - Шымкент: Гылым, 1993. - 328 с.
60. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т.1. Арифметика. Алгебра. Анализ. - М: Наука, 1987. - 432 с.
61. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнения математической физики нечетного порядка. - Новосибирск: Изд-во НГУ. - 1990. - 132 с.
62. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1968. - 496 с.
63. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа, 1970. - 712 с.
64. Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. - Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1990. - 208 с.
65. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. - 830 с.
66. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. - Т. 2. М-Л: ГИТТЛ, 1951. - 544 с.
67. Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР. - 1950. - Т. 70. - № 3. - С. 373-376.
68. Лернер М.Е. О качественных свойствах функции Римана // Дифференц. уравнения. - 1991. - Т. 27. - № 12. - С. 2106-2120.
69. Лозановская И.Т., Уфлянд Я.С. Об одном классе задач математической физики со смешанным спектром собственных значений // Доклады АН СССР. - 1965. - Т. 164. - № 5. - С. 1005-1007.
70. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло и массо-переноса. - М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. - 536 с.
71. Матчонов О.С. Задачи со свободной границей для вырождающихся параболических уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ташкент: 1999. - 19 с.
72. Мередов М.М. О существовании решения краевой задачи для уравнения смешанного типа четвертого порядка // Известия АН Турк. ССР. Серия физ.-техн., хим. и геол. наук. - 1967. - № 4. - С. 3-11.
73. Мередов М.М. О единственности решения краевых задач для уравнения смешанного типа четвертого порядка // Известия АН Турк. ССР. Серия физ.-техн., хим. и геол. наук. - 1967. - № 4. - С. 11-16.
74. Мередов М.М. О существовании решений краевых задач для уравнения смешанного типа // Известия АН Турк. ССР. Серия физ.-техн., хим. и геол. наук. - 1968. - № 4. - С. 3-10.
75. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. - М.: Изд-во МГУ, 1988. 150 с.
76. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 512 с.
77. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1969. - 528 с.
78. Нахушев А.М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // Дифференц. уравнения. - 1968. - Т. 4. - № 1. - С. 52-62.
79. Нахушев А.М. Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка. - Нальчик, Эльбурс, 1992. - 155 с.
80. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высш. шк., 1995. - 301 с.
81. Окунев Л.Я. Кольцо многочленов и поле рациональных функций // Энциклопедия элементарной математики. Кн. 2. - М.: Гостехиздат, 1951. - С. 222-225.

82. Плетнер Ю.Д. О математической структуре решения уравнения $\frac{\partial^2}{\partial^2} [u_{xx} - \beta^2 u] + \varpi_0^2 u = 0$ и о связанных с ним задачах // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 1990. - Т. 30. - № 6. - С. 868-882.
83. Плетнер Ю.Д. О свойствах решений некоторых уравнений в частных производных // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 1992. - Т. 32. - № 6. - С. 890-903.
84. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. - М.: Наука, 1983. - 750 с.
85. Пулькин С.П. Задача Трикоми для общего уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Доклады АН СССР. - 1958. - Т. 118. - № 1. - С. 38-41.
86. Рубинштейн Л.И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН СССР. Серия геогр. - 1948. - Т. 12. - № 1. - С. 27-45.
87. Рэлей Л. Теория звука. - Т. 1. - М.: ГИТТЛ, 1940. - 499 с.
88. Сабитов К.Б. О принципе максимума для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. - 1988. - Т. 24. - № 11. - С. 1967-1975.
89. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. - Ташкент: Фан, 1974. - 156 с.
90. Салахитдинов М.С., Бердышев А.С. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения в области с отходом от характеристики // Доклады АН СССР. - 1992. - Т. 327. - № 3. - С. 303-305.
91. Салахитдинов М.С., Джураев Т.Д. Об одной смешанной задаче для уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. - 1971. - № 4. - С. 26-31.
92. Салахитдинов М.С., Исломов Б. О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа // Доклады АН СССР. - 1990. - Т. 311. - № 4. - С. 797-801.
93. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. - Ташкент: Фан, 1997. - 168 с.
94. Садыбеков М.А. Краевые задачи в областях с отходом от характеристики для уравнений гиперболического и смешанного типов второго порядка: Автореферат дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ташкент: Фан, 1993. - 37 с.
95. Садыбеков М.А., Кальменов Т.Ш. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. - 1990. - Т. 26. - № 1. - С. 60-65.
96. Садыбеков М.А., Тойжанова Г.Д. Спектральные свойства одного класса краевых задач для параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. - 1992. - Т. 28. - № 1. - С. 176-179.
97. Салихов Ш.Н. Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего и высокого порядков с действительными характеристиками: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 1984. - 115 с.
98. Смирнов М.М. Модельное уравнения смешанного типа четвертого порядка. - Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1972. - 123 с.
99. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. - М.: Наука, 1970. - 296 с.
100. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4. Часть 1. - М.: Наука, - 1974. - 336 с.
101. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4. Часть 2. - М.: Наука, - 1981. - 552 с.
102. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнения с частными производными. - Киев: Наукова Думка. - 1980. - 244 с.
103. Соболев С.Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе // Докл. АН СССР. - 1956. - Т. 109, № 4. - С. 707 - 709.
104. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Доклады АН СССР. - 1987. - Т. 297. - № 3. - С. 547-552.

105. Сопуев А. О краевых задачах А.В. Бицадзе для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Известия АН УзССР. Серия физ. - мат. наук. - 1982. - № 2. - С. 23-27.
106. Сопуев А., Джураев Дж.Т. О краевых задачах для смешанного парабола-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа // Прямые и обратные краевые задачи математической физики. - Ташкент: Фан, 1986. - С. 63-73.
107. Сопуев А., Джураев Дж. Т. Об одной краевой задаче для парабола-гиперболического уравнения // Тезисы докл. Всесоюзн. школы молодых ученых «Функ. методы в прикл. матем. и матем. физике». Ч. II. - Ташкент: ТашГУ, 1988. - С. 17-18.
108. Сопуев А. Об аналогах задач Геллерстедта для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Краевые задачи механики сплошных сред. - Ташкент: Фан, 1982. - С. 87-99.
109. Сопуев А. Оценка решения одной задачи Геллерстедта для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Доклады АН УзССР. - 1982. - Т. 2. - С. 23-27.
110. Сопуев А. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения. - Ташкент: Фан, 1984. - С. 45-55.
111. Сопуев А. О краевых задачах для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. - 1987. - Т. 2. - С. 33-38.
112. Сопуев А. Краевые задачи для парабола-гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами в параболической части // Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. - Ташкент: Фан, 1989. - С. 132-136.
113. Сопуев А. Краевые задачи для парабола-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. - 1989. - Т. 4. - С. 31-37.
114. Сопуев А., Джураев Дж. Т. Краевые задачи для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. - 1989. - Т. 25.-№6.-С.1009-1015.
115. Сопуев А. Принцип максимума для уравнения гиперболического типа четвертого порядка. // Науч. тр. ОшГУ. Физ.-мат. науки. - Ош: ОшГУ, 1995. - Вып. 1. - С. 23-27.
116. Сопуев А. Краевые задачи для смешанного парабола-гиперболического уравнения четвертого порядка с младшими членами // Науч. тр. ОшГУ. Физ.-мат. науки. - Ош: ОшГУ, 1995. - Вып. 1. - С. 28-33.
117. Сопуев А., Асылбеков Т. Краевые задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка. // Науч. тр. ОшГУ. Физ.-мат. науки. - Ош: ОшГУ, 1995. - Вып. 1. - С.34-37.
118. Сопуев А. Краевые задачи со смещением для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Тезисы докл. конф. матем. и мех. Киргизии. - Фрунзе: Илим, 1987. - С. 65.
119. Сопуев А. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка // Тез. докл. науч. конф. «Краевые задачи и их спектральные вопросы для дифференциальных уравнений». Алма-Ата, май, 1991 г. - Алма-Ата, 1991. С. 92.
120. Сопуев А. Обратные задачи для псевдопараболического уравнения высокого порядка // Тез. докл. Всесоюзной конф. «Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач». - Бишкек, сент. 1991 г. - Бишкек, 1991. С. 100.
121. Сопуев А. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // Тез. докл. Междун. науч. конф. «Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции», Самара, янв. 1992 г. - Самара, 1992. - С. 237-238.

122. Сопуев А. Об обратной задаче для уравнения третьего порядка // Тез. докл. Всесоюзной конф. «Условно-корректные задачи мат. физики и анализа», Новосибирск, июнь, 1992 г. - Новосибирск, 1992. - С. 78-79.
123. Сопуев А. Краевые задачи для смешанного парабола-гиперболического уравнения четвертого порядка // Тез. докл. юбилейной науч. конф. посвящ. 50-летию развития математики в АН Казакстана, Алматы, сент. 1995 г. - Алматы, 1995. - С. 184.
124. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнения смешанного типа: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Бишкек, 1996. - 249 с.
125. Сопуев А., Асылбеков Т.Д. Функция Римана и представление общего решения гиперболических уравнений четвертого порядка. // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып. 27. - С. 276-280.
126. Сопуев А., Пирматов А. З. Краевые задачи для смешанного псевдопарабола-гиперболического уравнения четвертого порядка. // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1998. - Вып. 27. - С. 281-286.
127. Сопуев А. Задача Коши для строго гиперболического уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами // Науч. тр. ОшГУ. Физ.-мат. науки. - Ош: ОшГУ, 1999. - Вып. 2. - С. 178-186.
128. Сопуев А., Пакиров С. Краевые задачи для смешанного псевдопарабола-гиперболического уравнения третьего порядка с линией сопряжения $y=0$ // Науч. тр. ОшГУ. Физ.-мат. науки. - Ош: ОшГУ, 1999. - Вып. 2. - С. 187-194.
129. Сопуев А., Раманкулов М. Краевые задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка // Науч. тр. ОшГУ. Физ.-мат. науки. - Ош: ОшГУ, 1999. - Вып. 2. - С. 195-203.
130. Стручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженерно-физический журнал. - 1961. - Т. 4. - № 11. - С. 99-104.
131. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: ГИФМЛ, 1959. - 440 с.
132. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 736 с.
133. Тохиров Ж.О. Метод потенциалов для парабола-гиперболического уравнения // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. - 1988. - № 4. - С. 50-54.
134. Тохиров Ж.О. К теории нелокальных краевых задач и задач со свободной границей для параболических, гиперболических и смешанных парабола-гиперболических уравнений: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 1999. - 38 с.
135. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. - М. -Л.: Гостехиздат, 1947. - 190 с.
136. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. - М.: ИЛ, 1957. - 444 с.
137. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, - 1977. - 624 с.
138. Уринов А.К. Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в односвязной и двусвязной областях: Автореферат дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 1993. - 29 с.
139. Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженерно-физический журнал. - 1964. Т. 7. - № 1. - С. 89-92.
140. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. - М.: Мир, 1985. - 384 с.
141. Франкль Ф.И. О задачах Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений // Известия АН СССР. Серия матем. - 1945. - Т. 9. - № 2. - С. 121-242.
142. Франкль Ф.И. Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева-Бицадзе // Вестник ЛГУ. Серия матем., мех. и астр. - 1951. - Т. 6. - № 11. - С. 3-7.
143. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. - М.: Наука, 1973. - 712 с.
144. Чудновский А.Ф. Теплофизика почвы. - М.: Наука, 1976. - 352 с.

145. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений // Дифференц. уравнения. - 1983. - Т. 19. - № 1. С. 145-152.
146. Шхануков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Нальчик, 1985. - 225 с.
147. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.A. Maximum principia for a class of hyperbolic equations and aplications to equatione of mixed elliptic-hiperbolic type // Communs Pure and Appl. Math. - 1953. - Vol. VI. - № 4. - P. 455-470.
148. Cannon I.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. - 1963. - Vol. 21. - № 2. - P. 155-160.
149. Costa L.R. Su un'equazione parabolica degenera // Riv. Mat. Univ. Parma. - 1980. - №6. - P. 253-271.
150. Gellerstedt S. Quelques probemes mixtes pour l'equation $y'''z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv for Mat., Astr. Osh Fis. - 1936. - bd. 26 A. - № 3. - P. 1-32.
151. Pini B. Un problema di valori al contorno per un'eduazione a derivate parziali del terzo ordine con parte principale di tipo composito // Rend. del Sem.della fac.di sci.della univ. di cagliari. - 1957. - Vol. XXVII. - P. 114-135
152. Pini B. Su una equazione parabolica non lineare del ordine // Rend. del Sem. Della fac.di sci. Della univ.di cagliari. - 1957. Vol. 27.
153. Rundell W. Determination of a Unknown Non-Homogeneous term in a linear partial differential equation from over specified baundery data // Appl. Analysis. - 1980. - Vol. 10. - № 3. - P. 231-242.
154. Stecher M., Rundell W. Maximum principles for pseudoparabolic partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. - 1977. - Vol. 57. - P. 110-118.
155. Sutton G.L. On the equation of diffusion in a turbulent medium // Proc. of the royal soc. - 1943. - Ser. A. - Vol. 182. - № 6. - P. 48-75.

Тухтамурад Джураевич Джураев, Адахимжан Сопуев

**К теории дифференциальных уравнений
в частных производных четвертого порядка**

Утверждено к печати Ученым советом Института математики
им. В.И. Романовского АН РУз

Редактор Х.Э Раупова
Художник Г.Г. Жирнов

Сдано в набор 20.05.2000. Подписанов к печати 9.06.2000.
Формат 60х84 1/16. Усл. печ. л. 9.0. Уч.-изд. л., 7,5.
Тираж 350 экз. Заказ 116. Цена договорная.

Издательство «Фан» АН РУз.
700047. Ташкент, ул. акад. Я. Гулямова, 70

Отпечатано на Ташкентской
книжно-журнальной фабрике Государственного комитета
Республики Узбекистан по печати. Ташкент, Юнусабад,
ул. Мурадова, 1.